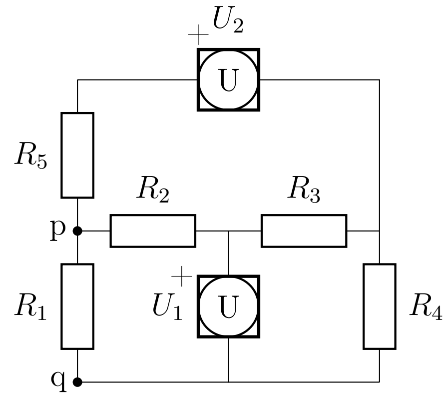
Hemuppgift nr 2 av 4, deadline 9/11 2010

Inlämning av lösta uppgifter sker den 9/11 kl 15:00-15:15 på övningen i sal E35 och E51. **Kamraträttning** sker 9/11 kl 16-17. Obs: För att uppgiften ska tillgodoräknas måste du delta i både att lösa uppgiften (före aktuellt datum) och i rättningen det aktuella datumet.
När du löser uppgiften, tänk på att **uppgifterna ska kamraträttas**, skriv därför en tydlig lösning som går lätt att följa, med tydliga bilder, introducera storheter, vad som söks, lösningsgång samt väl förenklade svar på delfrågorna. Denna gång ska den **rättade hemuppgiften samlas in**.
Häfta ihop lösningsbladen och **skriv namn** på framsidan. Examinator: Lars Jonsson

---

1 av 5) Nodanalys



a) Inför lämpliga noder. Låt $R_1 = R,\ R_2 = 2R,\ R_3 = 20R,\ R_4 = 4R,\ R_5 = 5R$.

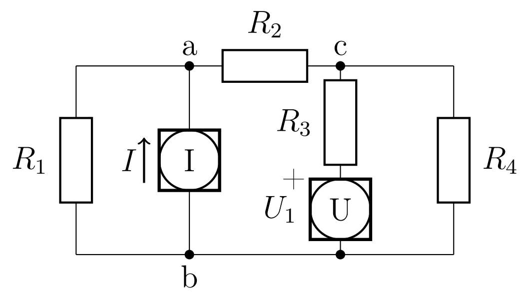
b) Bestäm en Norton-ekvivalent (I_0, R_0) tvåpol för kretsen med avseende på pq, med Metod 1 (räkna ut tomgångsspänning och kortslutningsström för att bestämma tvåpolen). Använd nodanalys.

c) Koppla en last R_L till tvåpolen. Vilken effekt utvecklas i R_L.

d) Sök det R_L som ger maximal effektutveckling. Hur förhåller sig R_L/R_0 då effektutvecklingen i lasten är maximal.

---

2 av 5) Maskanalys. Låt $R_1 = R$, $R_2 = 2R$, $R_3 = 3R$, $R_4 = 4R$.



a) Använd maskanalys för att bestämma spänningen mellan cb. Ledning: vid en strömkälla som i figuren till vänster introducerar man en okänd spänning U_{ab} (utöver maskströmmarna) att användas vid potentialvandringarna i maskorna.

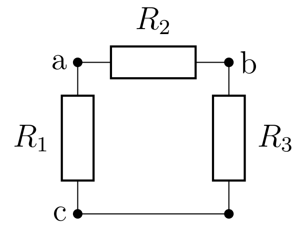
b) Bestäm en Thevenin-ekvivalent (U_0, R_0) med aveseende på bc med Metod 2 (bestäm tomgångsspänning med maskanalys, och inre resistansen genom att nollställa källorna.).

c) Koppla in en last R_L till tvåpolen. Vilken effekt utvecklas i R_L.

d) Sök det R_L som ger maximal effektutveckling. Hur förhåller sig R_L/R_0 då effektutvecklingen i lasten är maximal.

---

3 av 5) Delta-Y nät.



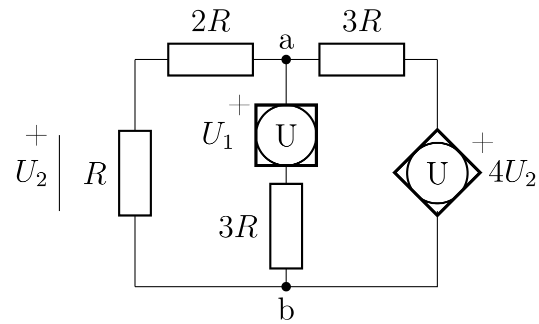
a) Bestäm motsvarande Y-nät.

b) Koppla in en spänningskälla U_0, mellan ac, vad blir spänningnen bc? Kolla detta för både Y-nätet och delta-nätet. Stämmer resultatet överens?

c) Kontrollera dimensionerna på U_{cb} i resultaten ovan.

---

4 av 5) Beroende generatorer.



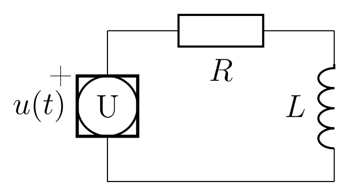
a) Bestäm U_{ab} som en funktion av U_1 och R. Använd nodanalys.

b) Använd Metod 1 till att bestämma en Norton-tvåpolsekvivalent (I_0, R_0) med avseende på ab.

c) Varför går det inte att använda Metod 2 (nollställning av källor).

---

5 av 5) Introduktion till komplexa strömmar och spänningar. Här är $u(t) = A\cos(\omega t + \frac{\pi}{6})$ V.



a) Vad är den komplexa toppvärdesspänningen $\underline{\hat{U}}$?

b) Vad är impedansen för resistansen R? Vad är impedansen för spolen med induktans L? Ange också den totala impedansen i kretsen.

c) Använd Ohm's lag på de komplexa storheterna för att bestämma $\underline{\hat{I}}$.

d) Vad är amplituden (också kallat längd, belopp, eller absolutbeloppet) av strömmen? vad är fasen?

e) Ange strömmen i tidsdomänen.

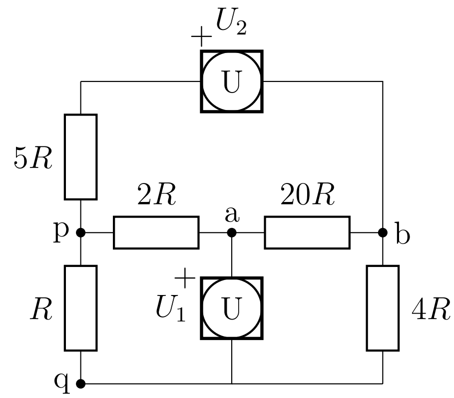
f) $L = 1.1$H, $f = 50$Hz,$R = 500\Omega$, $A = 1.6$V. Rita nu de komplexa storheterna $\underline{\hat{I}}$, $\underline{\hat{U}}$ i komplexa talplanet. Markera vad som är amplitud och fas, samt fasskillnad mellan strömmen och spänningen.

g) Skissa nu på en graf som funktion av tiden där $u(t)$ och $i(t)$ är inritade, markera amplitud och absoluta faser samt fasskillnad.

Lösning av hemuppgift nr 2, EI1100, 2010-11

Lars Jonsson

1 av 5) Nodanalys



1a) och 1b) Vi behöver två noder till, kalla dem a och b. Se figur. Vi inför också de angivna resistanserna. För att bestämma en Norton-ekvivalent med hjälp av metod 1 ska vi 1) bestämma tomgångsspänningen U_0, och 2) bestämma kortslutningsströmmen I_0. Vi börjar med att bestämma tomgångspänningen och noterar att $U_0 = V_p - V_q$.

Vi använder nodanalys. Vi har 4 noder och använder q som referens, $V_q = 0$. Vi har tre okända potentialer V_a, V_b och V_p i respektive nod.

Vi noterar att $V_a = U_1$. Vi har nu två okända potentialer kvar. Vi ställer upp KCL i nod p:

$$\frac{V_p}{R} + \frac{V_p - U_2 - V_b}{5R} + \frac{V_p - U_1}{2R} = 0 \tag{1}$$

och i nod b:

$$\frac{V_b}{4R} + \frac{V_b + U_2 - V_p}{5R} + \frac{V_b - U_1}{20R} = 0 \tag{2}$$

om vi förenklar får vi

$$V_p\Big(\underbrace{1 + \frac{1}{5} + \frac{1}{2}}_{17/10}\Big) - \frac{V_b}{5} = \frac{U_1}{2} + \frac{U_2}{5} \tag{3}$$

och

$$V_b\Big(\underbrace{\frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{20}}_{1/2}\Big) - \frac{V_p}{5} = \frac{U_1}{20} - \frac{U_2}{5} \tag{4}$$

Där vi har förkortat bort R.

Vi söker nu V_p, ochi använder (3) till att uttrycka V_b i V_p kan vi substituera detta i (4) och få ut V_p vi får:

$$V_b = V_p\frac{17}{2} - \frac{5U_1}{2} - U_2 \tag{5}$$

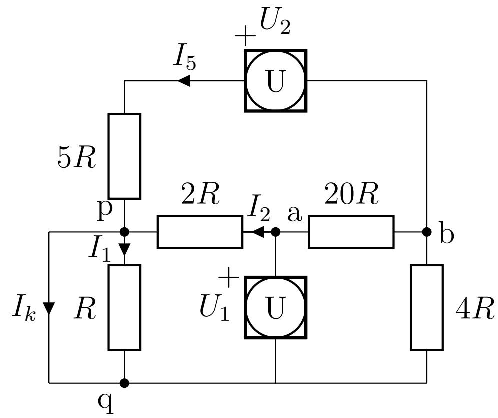
och

$$\frac{1}{2}(V_p\frac{17}{2} - \frac{5U_1}{2} - U_2) - \frac{V_p}{5} = \frac{U_1}{20} - \frac{U_2}{5} \tag{6}$$

vilket ger efter förenkling:

$$V_p = U_1\frac{26}{81} + U_2\frac{6}{81} = \text{delsvar tomgångsspänning} \tag{7}$$

Vi ska nu bestämma kortslutningsströmmen I_k. Vi kortsluter först mellan pq, se figur. Nod p och nod q får samma potential. Ett sätt att få ut I_k är att sätta upp KCL i punkten p, med införda storheter får vi:



$$I_k + I_1 = I_5 + I_2 \tag{8}$$

Vi vet potentialen i a och i p och får därför $I_2 = U_1/(2R)$, vi får vidare att $I_1 = 0$.

För att bestämma I_5 måste vi veta potentialen i b och vi använder nodanalys för att ta fram denna potential.

Vi nu endast har tre noder, a, b och q. Vi fortsätter att använda q som referens $V_q = 0$. Vi har fortfarande att $V_a = U_1$. Vi har då endast en okänd potential V_b. Om vi sätter upp KCL i b får vi:

$$\frac{V_b}{4R} + \underbrace{\frac{V_b + U_2 - 0}{5R}}_{I_5} + \frac{V_b - U_1}{20R} = 0 \tag{9}$$

förenklingar ger:

$$V_b = -\frac{2U_2}{5} + \frac{U_1}{10} \tag{10}$$

Vi får strömmen I_5 enligt ovan:

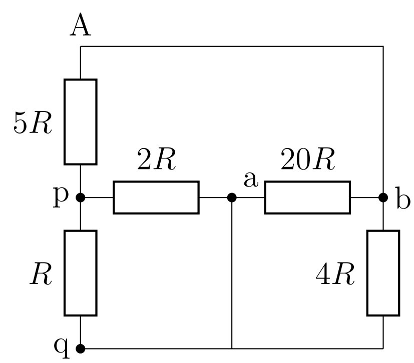
$$I_5 = \frac{V_b + U_2}{5R} = \frac{1}{R}(\frac{3}{25}U_2 + \frac{1}{50}U_1) \tag{11}$$

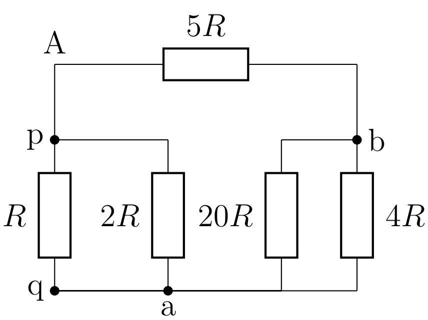
Vi får korstlutningströmmen som

$$I_k = I_2 + I_5 = \frac{1}{25R}(13U_1 + 3U_2) = \text{delsvar} \tag{12}$$

Norton-ekvivalentens resistans R_0 blir

$$R_0 = \frac{U_0}{I_k} = \frac{25R}{13U_1 + 3U_2}\frac{26U_1 + 6U_2}{81} = \frac{50}{81}R = \text{delsvar} \tag{13}$$



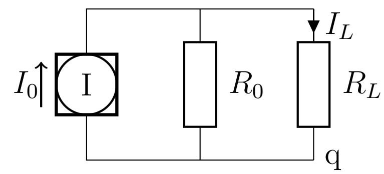


Om man jämför med metoden för att nollställa källorna för att bestämma totalresistansen map pq. Vi gör detta i orginalkretsen och ritar om kretsen se figur A och B till höger. Notera att om vi drar-ihop a till linjen längst ned får vi kretsen i figur B. Vi får

$$R_{pq} = (R//2R)//(5R + (20R//4R)) = \frac{50}{81}R \tag{14}$$

vilket stämmer överens med ovanstående resultat.

1b) Vi ersätter nu nätet med en Norton-ekvivalenten, samt kopplar in en R_L last mellan pq. Effekten utvecklad i R_L är $P = U_L I_L = I_L^2 R_L$. Vi bestämmer I_L genom strömdelning:



$$I_L = I_0 \frac{1/R_L}{1/R_0 + 1/R_L} = I_0 \frac{R_0}{R_0 + R_L} \tag{15}$$

Effekten blir

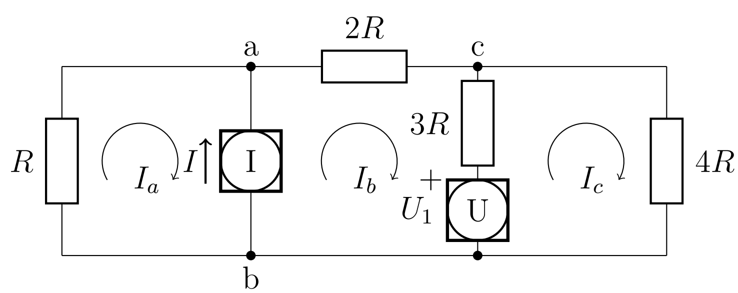
$$P_L = R_L I_L^2 = I_0^2 \frac{R_L R_0^2}{(R_L + R_0)^2} \tag{16}$$

1c) För att hitta maximum tar vi derivatan av P_L map R_L och söker kritiska punkter. Vi noterar att för $R_L = 0$ och $R_L = \infty$ får vi $P_L = 0$, eftersom uttrycket är possitivt förväntar vi oss ett max där emellan.

$$\frac{d}{dR_L} P_L = I_0^2 \left(\frac{R_0^2}{(R_L + R_0)^2} - \frac{2R_0^2 R_L}{(R_L + R_0)^3}\right) = \frac{I_0^2 R_0^2}{(R_0 + R_L)^3}(R_0 - R_L) = 0 \tag{17}$$

Fysikaliskt rimliga lösningar till denna ekvation är endast icke-negativa resistanser vi får möjliga lösningar i $R_L = R_0$ och i $R_L = \infty$. Maximat ligger i lösningen $R_L = R_0$ där vi får $P_L = I_0^2 R_0/4$ vilket är hälften av den totala effekten i kretsen $R_{tot} = R_L//R_0 = R_0/2$ vilket ger $P_{tot} = I_0^2 R_0/2$. Svar max sker vid $R_L = R_0 = 50R/81$.

2a och 2b) Vi söker en Thevenin-ekvivalenten map cb. Vi ska använda Metod 2 och maskanalys för att bestämma tomgångspänningen, $U_0 = U_{cb}$.



Vi börjar med att införa resistanserna. Vi inför maskorna a, b och c. I ledningen står det att vi ska också införa spänningen U_{ab} som en okänd. Vi har därför 4 okända, I_a, I_b, I_c och U_{ab} . Vi behöver därför 4 ekvationer.

Innan vi startar med att bestämma maskströmmarna. Låt oss se hur vi kan få ut $U_0 = U_{cb}$. Vi ser att $U_0 = I_c R_4 = 4RI_c$. Vi söker därför strömmen I_c.

Låt oss nu ställa upp ekvationerna. Vi potentialvandrar i maska a, b ochl c. I maska a:

$$-RI_a - U_{ab} = 0,\ U_{ab} - 2RI_b - 3R(I_b - I_c) - U_1 = 0, \quad U_1 - 3R(I_c - I_b) - 4RI_c = 0 \tag{18}$$

För att få den fjärde ekvationen noterar vi att strömkällan tvingar strömmen I att gå mellan ab vi får därför från maskströmmarna att i grenen ab har vi $I_b - I_a = I$. De två första ekvationerna eliminerar U_{ab}, tillsammans med $I_a = I_b - I$ får vi

$$-R(I_b - I) - 2RI_b - 3R(I_b - I_c) = U_1, \quad 3R(I_c - I_b) + 4RI_c = U_1 \tag{19}$$

vilket förenklas till

$$-6I_b + 3I_c = U_1/R - I,\ 7I_c - 3I_b = U_1/R \tag{20}$$

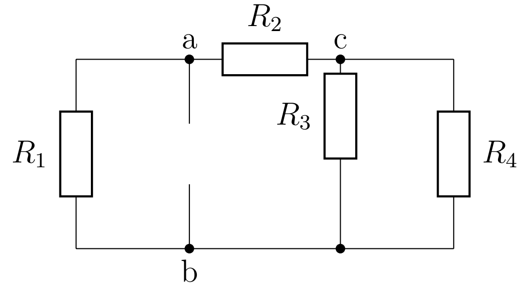
Löser vi detta 2x2 ekvationssystem får vi direkt att

$$I_c = \frac{1}{11R}(U_1 + IR) \tag{21}$$

Vi kan nu bestämma tomgångspänningen $U_0 = U_{bc}$ som

$$U_0 = 4RI_c = \frac{4}{11}(U + RI) = \text{delsvar}. \tag{22}$$

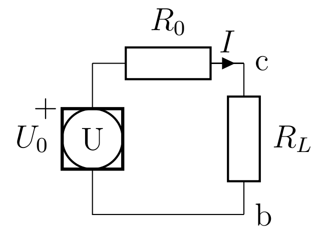
Det andra steget i att bestämma Thevenin-ekvivalenten är att bestämma tvåpolens resistans. Vi skulle använda metod 2, dvs att nollställa de fria källorna i nätet och räkna ut resistansen map cb. Vi får nätet till höger. Resistansen med avseende på cb, R_0, blir



$$R_0 = (R_1{+}R_2)//R_3//R_4, \; R_0 = \frac{(R_1+R_2)R_3R_4}{(R_1+R_2)(R_3+R_4)+R_3R_4}$$
$$= [\text{insättning av värden för } R_i] = \frac{12}{11}R = \text{rättat svar} \quad (23)$$

Vi får en Thevenin-ekvivalent med spänningskälla $U_0 = 4(U + RI)/11$ och resistans $R_0 = 12R/11$. Kretsen med inkopplad last R_L syns till höger.

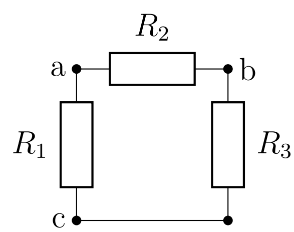
2c) Effekten i lasten blir $P = U_L I = U_L^2/R_L$ där spänningsdelning ger att $U_L = U_0 R_L/(R_0 + R_L)$. Vi får



$$P_L = U_0^2 \frac{R_L}{(R_0+R_L)^2} \quad (24)$$

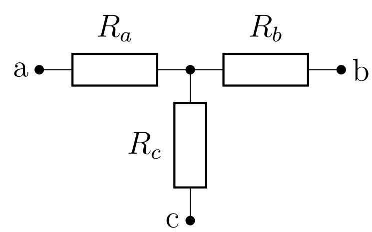
2d) Maximering av effekten i lasten är samma problem som i 1c, med enda skillnaden vi nu har U_0 istället för I_0R_0. Deriverar med avseende på R_L och får en ekvation som är upp till en konstant exact samma som i ekvation (17) och med samma maximal punkt $R_L = R_0 = 12R/11$. [rättat]

3a) Delta-Y nät. Enligt formlerna i kap P2.8 får vi att



$$R_a = \frac{R_1R_2}{R_1+R_2+R_3}, \; R_b = \frac{R_2R_3}{R_1+R_2+R_3}, \; R_c = \frac{R_1R_3}{R_1+R_2+R_3} \quad (25)$$

Uttrycket är lätt att komma ihåg då täljaren endast innehåller de resistanserna i delta-nätet som har anslutning till den aktuella noden. Delar med summan av alla resistanser. T.ex. i nod a har vi anslutna R_1, R_2 och deras produkt blir i täljaren till R_a. På samma sätt för de övriga två noderna.

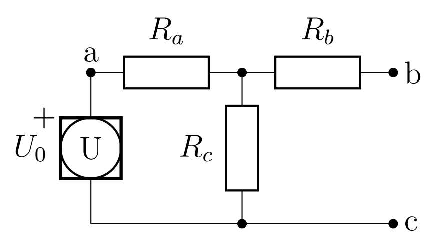


3b) I delta nätet får vi spänningen över bc genom spänningsdelning

$$U_{bc} = U_0 \frac{R_3}{R_2+R_3}. \quad (26)$$

I Y-nätet får vi U_{bc} genom spänningsdelning mellan R_c och R_a. Notera att det inte går någon ström genom R_b så denna kommer inte att bidraga till något spänningsfall.

Vi får

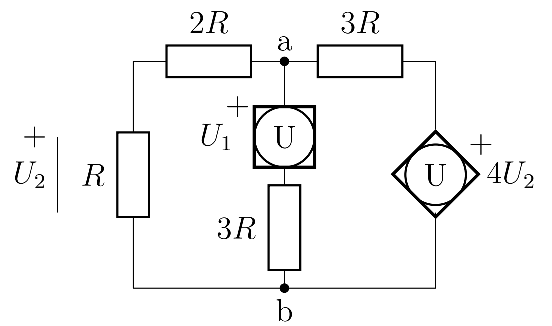


$$U_{bc} = U_0\frac{R_c}{R_c+R_a} = U_0 \frac{\frac{R_1R_3}{R_1+R_2+R_3}}{\frac{R_1R_3}{R_1+R_2+R_3} + \frac{R_1R_2}{R_1+R_2+R_3}} = U_0 \frac{R_3}{R_3+R_2} \quad (27)$$

3c) Kontrollera dimensionerna: Eftersom båda uttrycken ger samma resultat räcker det med att kontrollera det ena resultatet, vi har som vanligt "vao" regeln $[U_{bc}]$=V, $[I]$ =A och $[R_i]$ =Ω, insatt i formeln för U_{bc} ovan får vi

$$V = V\frac{\Omega}{\Omega+\Omega} = V \tag{28}$$

korrekt dimension.



4a) Vi har två noder a och b. Vi använder b som referens. Vi får följande ekvation som beskriver KCL i a:

$$\frac{V_a - U_1}{3R} + \frac{V_a}{3R} + \frac{V_a - 4U_2}{3R} = 0 \tag{29}$$

Notera att bidraget från den beroende spänningskällan $4U_2$ måste översättas till ett bidrag i den okända potentialen V_a. Vi ser att U_2 kan uttryckas som en spänningsdelning i termer av V_a vi får

$$U_2 = V_a\frac{R}{R+2R} = \frac{1}{3}V_a. \tag{30}$$

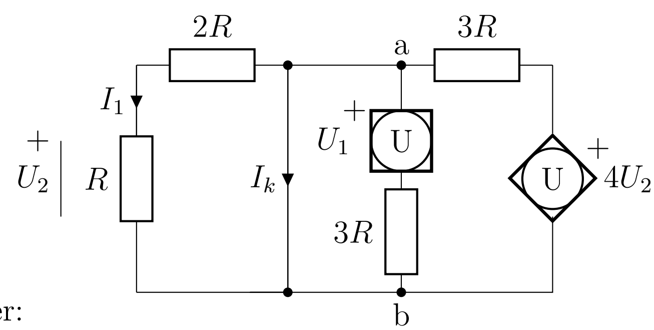
Vi sätter in detta resultat i ekvationen ovan för att få:

$$\frac{V_a - U_1}{3R} + \frac{V_a}{3R} + \frac{V_a - 4V_a/3}{3R} = 0 \tag{31}$$

Löser vi denna ekvation får vi:

$$V_a = \frac{3}{5}U_1 = \text{delsvar} \tag{32}$$

4b) Bestäm en Norton-ekvivalent, med Metod 1. Vi har redan tomgångspänningen $U_0 = V_a$ från 4a) ovan. Vi behöver kortslutningsströmmen mellan ab. Vi ritar om nätet:



Vi ser att kortslutningen gör att spänningsfallet mellan ab är noll. Om vi gör som ovan för att bestämma U_2 genom spänningsdelning får vi $U_2 = 0$. Vi får också att $I_1 = 0$. Om vi använder KCL i nod a får vi nu

$$I_1 + I_k + \frac{0 - U_1}{3R} + \frac{0 - 4U_2}{3R} = 0 \tag{33}$$

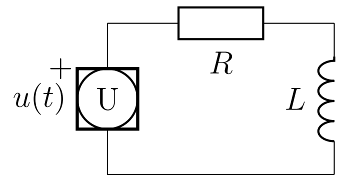
Men vi har just noterat att $I_1 = 0$ och $U_2 = 0$. Detta ger:

$$I_0 = I_k = \frac{U_1}{3R} = \text{delsvar} \tag{34}$$

Vi får nu den tvåpols resistansen R_0 som

$$R_0 = \frac{U_0}{I_0} = \frac{9R}{5} \tag{35}$$

4c) Metod 2 skulle ha nollställt alla *fria* källor. Här har vi en beroende källa vilken inte kan nollställas. Om vi hade trott att vi kunde nollställa också den beroende spänningskällan skulle vi fått tvåpolens resistans som $(R + 2R)//3R//3R = R \neq R_0$.



5a) Vi kommer ihåg Eulers formel: $\mathrm{e}^{\mathrm{j}x} = \cos x + \mathrm{j}\sin x$. Om vi väljer $x = \omega t + \pi/6$ kan vi skriva spänningen som

$$A\cos(\omega t + \frac{\pi}{6}) = u(t) = \mathrm{Re}(\underbrace{A\mathrm{e}^{\mathrm{j}\pi/6}}_{\underline{\hat{U}}}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}) \tag{36}$$

Vi får

$$\underline{\hat{U}} = A\mathrm{e}^{\mathrm{j}\pi/6}. \tag{37}$$

5b) Impedansen för R är $Z_R = R$. Impedansen för spolen är $Z_L = \mathrm{j}\omega L$. Den totala impedansen är $Z = Z_R + Z_L = R + \mathrm{j}\omega L$.

5c) Den komplexa strömmen är

$$\underline{\hat{I}} = \frac{\underline{\hat{U}}}{Z} = A\mathrm{e}^{\mathrm{j}\pi/6}\frac{1}{R + \mathrm{j}\omega L}. \tag{38}$$

5d) Absolutbeloppet:

$$|\underline{\hat{I}}| = |A|\underbrace{|\mathrm{e}^{\mathrm{j}\pi/6}|}_{=1}\left|\frac{1}{R + \mathrm{j}\omega L}\right| \tag{39}$$

Vi vet att för alla komplexa tal $z = a + \mathrm{j}b$ så gäller $|z|^2 = zz^* = (a + \mathrm{j}b)(a - \mathrm{j}b) = a^2 + b^2$. Vidare har vi

$$\left|\frac{1}{a + \mathrm{j}b}\right| = \left|\frac{a - \mathrm{j}b}{(a + \mathrm{j}b)(a - \mathrm{j}b)}\right| = \left|\frac{a - \mathrm{j}b}{a^2 + b^2}\right| = \frac{1}{a^2 + b^2}|a - \mathrm{j}b| = \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}} \tag{40}$$

Vi får slutligen att beloppet av strömmen är:

$$|\underline{\hat{I}}| = \frac{|A|}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}} \tag{41}$$

Fasen: För att kunna bestämma fasen måste vi omvandla $1/(R + \mathrm{j}\omega L)$ till polär form. Vi erindrar oss att om $a + \mathrm{j}b = z = |z|\mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta}$ så är $z^{-1} = |z|^{-1}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\theta}$, där $\tan\theta = b/a$ om $a > 0$. Därför är det tillräckligt att bestämma fasen av $R + \mathrm{j}\omega L$. Den är $\arg(R + \mathrm{j}\omega L) = \arctan(\omega L/R)$. Vi får nu

$$\arg(\underline{\hat{I}}) = \arg A + \arg \mathrm{e}^{\mathrm{j}\pi/6} - \arg(R + \mathrm{j}\omega L) = \arg A + \frac{\pi}{6} - \arctan(\frac{\omega L}{R}) \tag{42}$$

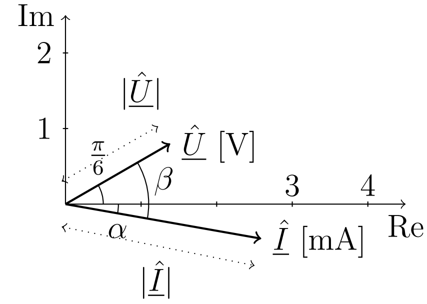
Amplituden A till vår cos-funktion är ett reellt tal. Om $A > 0$ är $\arg A = 0$ men om $A < 0$ så är $\arg A = \pi$. Antag här att $A > 0$. Svar: $\arg(\underline{\hat{I}}) = \pi/6 - \arctan(\omega L/R)$.

5e) Strömmen i tidsdomän blir enkel nu när vi vet både amplitud och fas: Vi har i föregående uppgift räknat ut att

$$\underline{\hat{I}} = \frac{|A|}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}}\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\pi/6 - \arctan(\omega L/R))} \tag{43}$$

Vi får nu strömmen i tidsdomän som

$$i(t) = \mathrm{Re}(\underline{\hat{I}}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}) = \frac{|A|}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}}\cos(\omega t + \pi/6 - \arctan(\omega L/R)) \tag{44}$$



5f) Notera att vi har två värdesiffror. Vi räknar med 3 och avrundar i svaret. Vi börjar med att bestämma $\omega = 2\pi f = 314$rad/s. [rättat]. Vi får $\omega L = 345\Omega$ Vilket ger att

$$|\hat{\underline{I}}| = \frac{A}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}} = 2.63 \cdot 10^3 \approx 2.6\text{mA} \tag{45}$$

och

$$\beta = \arctan \frac{\omega L}{R} = 0.605\text{rad} \approx 35^\circ \tag{46}$$

Vi får att $\alpha = \pi/6 - \arctan(\omega L/R) \approx = -0.0814\text{rad} \approx -4.7^\circ$. differansen $\beta = \arctan(\omega L/R)$ blir som ovan. I figuren har jag också markerat att de respektive beloppen med punktade dubbel-pilar. Notera att jag har skalat strömmen med en faktor 1000.

5g Vi ritar spänning och ström i samma diagram. Det är lämpligt att skala axlarna med π som i figuren. Vi har anget amplituden för respektive kurva. Samt absolut fas och fasskillnad mellan kurvorna. Precis som i det komplexa diagrammet har jag skalat strömmen med en faktor 1000.