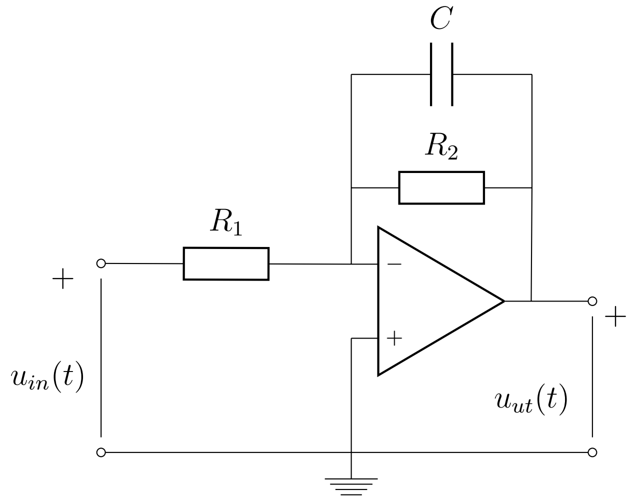
Tentamen i Elkretsanalys för EI1110 del 2

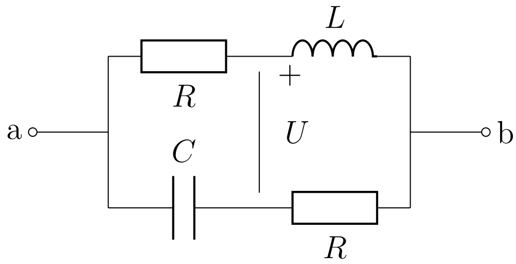
Datum/tid: 2013-06-03, kl 08-13. Hjälpmedel: Papper och penna.
Endast en uppgift per blad.
Godkänt för EI1110 del 2 om: $(A \geq 25\%)\&(B \geq 25\%)\&(A + B \geq 50\%)$. Bonus för hemuppgifterna räknas in i A+B värdet.
Namn och personnummer på varje blad. Lärare: Andrés Alayón Glazunov

A – Del

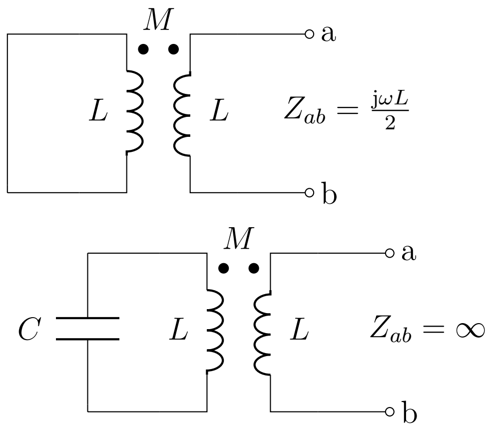
1) [5p] Kretsen till höger innehåller en operationsförstärkare som kan antas vara ideal.
a) Bestäm överföringsfunktionen $H(\omega)$.
b) Ange filtrets gain i dB. (j ska inte förekomma i utrycket!).
c) Ange typ av filter. Förklara.



2) [5p] a) Bestäm R så att Z_{ab} blir rent resistiv för alla frekvenser. Ange Z_{ab}.(*Ledning: Det komplexa talet* $Z = \frac{\alpha+j\beta}{\gamma+j\delta}$ *är reellt om* $\frac{\alpha}{\gamma} = \frac{\beta}{\delta}$. *Vi kan nu skriva* $Z = \frac{\alpha}{\gamma}$.)
b) Beräkna spänningen U för detta $R-$värde. U_{ab} är given.

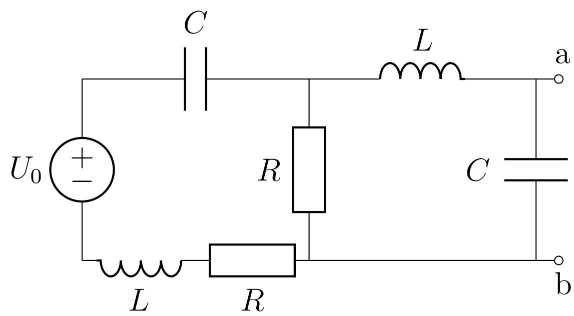


3) [5p] Två lika spolar med försumbar resistans är induktivt kopplade till varandra. Kortsluter man en av spolarna som från början var obelastad, uppmäts hälften av den ursprungliga induktansen över den andra. Om en kondensator med given kapacitans C ansluts till den ena spolen erhålls en oändlig impedans över den andra.
a) Bestäm spolarnas ömsesidiga induktans.
b) Ange spolarnas kopplingsfaktorn baserat på 3a).
c) Bestäm vinkelfrekvensen ω vid vilket man får $Z_{ab} = \infty$.



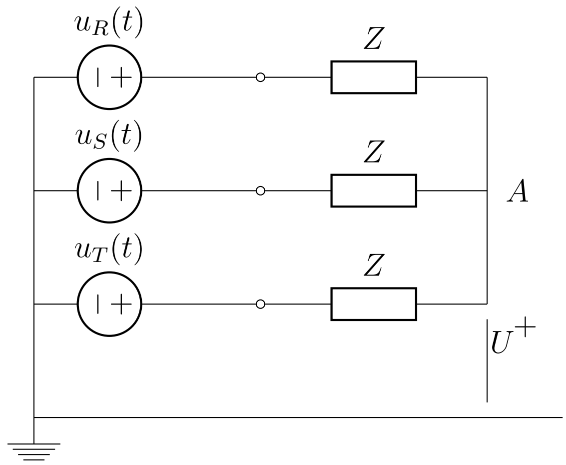
B – Del

4) [5p] Bestäm tvåpolsekvivalenten med avseende på ab då $\omega^2 LC = 1$. (*Ledning: Använd successiva tvåpolekvivalenter för att bestämma Thévenin-ekvivalenten till det avbildade nätet. Använd* $\omega^2 LC = 1$ *så tidigt som möjligt för att undvika långa utryck.*)

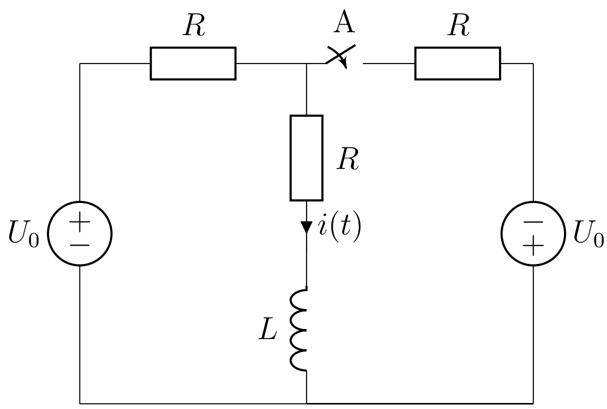


Var god vänd.

5) [5p] En symmetrisk, $Y-$kopplad belastning matas från ett tre-fasnät med huvudspänningen $|U_H|$. Belastningens nollpunkt är ej ansluten till nolledaren (nod A). De tre fasen betecknas i figuren med R, S, T.
a) Hur stor är spänningen U?
b) Antag nu att det blir avbrott i ena fasen, till exempel T. Hur stor blir $|U|$ utryckt som funktion av $|U_H|$ i det här fallet?



6) [5p] Här är U_0 en likspänningskälla. Vid tiden $t = 0$ sluts kontakten A. Stationärt tillstånd råder för $t < 0$.
a) Bestäm $i(t)$ som funktion av alla tider.
b) Bestäm den totala energin som förbrukas i resistansen R som ligger i serie med spolen för tidsintervallet $(0, \infty)$.



Kör hårt-men försiktigt, lycka till!

Lösningsförslag till Tentamen i Elkretsanalys för EI1110 del 2

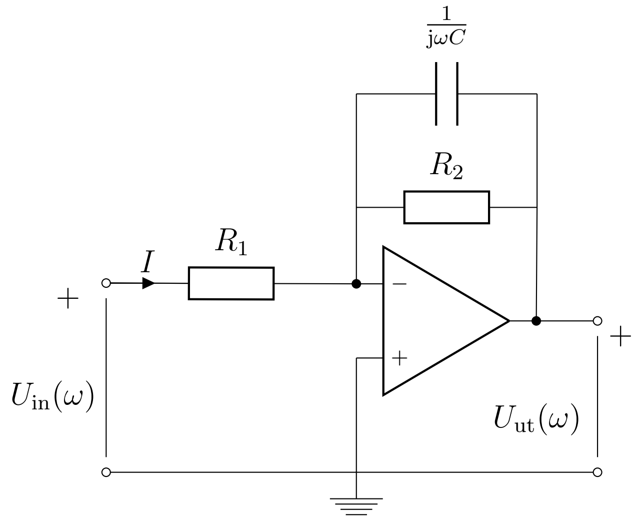
Datum/tid: 2013-06-03, kl 08-13.
Godkänt för EI1110 del 2 om: $(A \geq 25\%)\&(B \geq 25\%)\&(A+B \geq 50\%)$. Bonus för hemuppgifterna räknas in i A+B värdet.

Lärare: Andrés Alayón Glazunov

A – Del

1) [5p] a) Överföringsfunktionen definieras i frekvendomänen som

$$H(\omega) = \frac{U_{\text{ut}}(\omega)}{U_{\text{in}}(\omega)}.$$



Eftersom vi antar att operationsförstärkaren är ideal gäller det att $V_- = V_+$ och $I_- = I_+ = 0$. Detta ger

$$\begin{aligned} U_{\text{in}} &= IR_1 \\ U_{\text{ut}} &= -I\frac{R_2}{1+\mathrm{j}\omega R_2 C} \end{aligned}$$

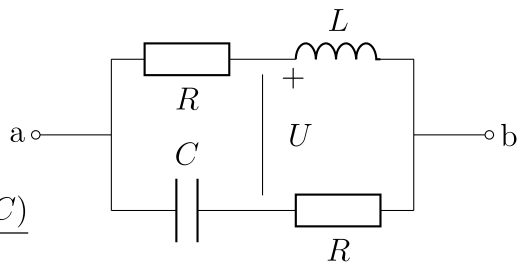
Vi får överföringsfunktionen $H(\omega) = -\frac{R_2/R_1}{1+\mathrm{j}\omega R_2 C}$.
b) Filtrets gain i dB är

$$G_{\text{dB}}(\omega) = 20\log|H(\omega)| = 20\log|-\frac{R_2/R_1}{1+\mathrm{j}\omega R_2 C}| = 20\log\left(\frac{R_2/R_1}{|1+\mathrm{j}\omega R_2 C|}\right) = 20\log\left(\frac{R_2/R_1}{\sqrt{1+\omega^2/{\omega_0}^2}}\right)$$

där $\omega_0 = 1/\sqrt{R_2 C}$ är brytfrekvensen. .
c) Lågpassfilter som låter passera frekvenser $\omega < \omega_0$ med förstärkning $G_{\text{dB}} \approx 20\log(R_2/R_1)$ för $R_2 > R_1$ men dämpar insignalen vid frekvenser $\omega > \omega_0$ enligt $G_{\text{dB}} \approx 20\log(R_2\omega_0/R_1\omega)$

---

2) [5p]
a) I kretsen ingår två parallella grenar innehållande två seriekopplade komponenter var. Den ekvivalenta impedansen mellan a och b är



$$\begin{aligned} Z_{ab} &= \frac{1}{\frac{1}{R+\mathrm{j}\omega L} + \frac{1}{R+\frac{1}{\mathrm{j}\omega C}}} \\ &= \frac{(R+\mathrm{j}\omega L)(1+\mathrm{j}\omega RC)}{1-\omega^2 LC + \mathrm{j}2\omega RC} = \frac{R(1-\omega^2 LC) + \mathrm{j}\omega(L+R^2C)}{1-\omega^2 LC + \mathrm{j}2\omega RC} \end{aligned}$$

Z_{ab} blir rent resistiv för alla frekvenser när den imaginera delen $\mathrm{Im}(Z_{ab}) = 0$ dvs. Z_{ab} är reell. Detta fåss genom at kräva att

$$\frac{R(1-\omega^2 LC)}{1-\omega^2 LC} = \frac{\omega(L+R^2C)}{2\omega RC}.$$

Efter rättframma förenkligar får vi att $R = \sqrt{\frac{L}{C}}$ och $Z_{ab} = R$.

b) Vi använder oss av spänningsdelning och potentialvandring vilket ger

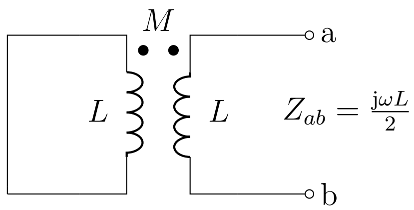
$$U = U_{ab}\frac{\mathrm{j}\omega L}{R+\mathrm{j}\omega L} - U_{ab}\frac{R}{R+\frac{1}{\mathrm{j}\omega C}} = U_{ab}\left(\frac{\mathrm{j}\omega L}{R+\mathrm{j}\omega L} - \frac{\mathrm{j}\omega RC}{1+\mathrm{j}\omega RC}\right).$$

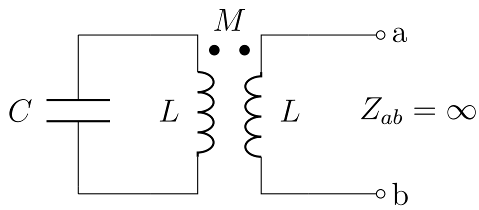
Insättning av $R = \sqrt{\frac{L}{C}}$ ger

$$U = U_{ab}\left(\frac{\mathrm{j}\omega L}{\sqrt{\frac{L}{C}}+\mathrm{j}\omega L} - \frac{\sqrt{\frac{L}{C}}\mathrm{j}\omega C}{1+\mathrm{j}\omega\sqrt{\frac{L}{C}}C}\right) = U_{ab}\left(\frac{1}{1+\frac{1}{\mathrm{j}\omega\sqrt{LC}}} - \frac{1}{1+\frac{1}{\mathrm{j}\omega\sqrt{LC}}}\right) = 0!$$

---

3) [5p] a) För fallet där ena spolen är kortsluten får vi följande samband





$$Z_{ab} = \frac{U_{ab}}{I_1} = \frac{\mathrm{j}\omega L}{2},$$

$$U_{ab} = \mathrm{j}\omega L I_1 + \mathrm{j}\omega M I_2 \text{ och } \mathrm{j}\omega L I_2 + \mathrm{j}\omega M I_1 = 0$$

där vi har försummat spolarnas resistans. Detta ger

$$\frac{U_{ab}}{I_1} = \mathrm{j}\omega L + \mathrm{j}\omega M\left(-\frac{M}{L}\right) = \mathrm{j}\omega\frac{L}{2},$$

från vilket utryck vi bestämmer

$$M = \frac{L}{\sqrt{2}},$$

b) Spolarnas kopplingsfaktorn är

$$k = \frac{M}{\sqrt{LL}} = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

c) För fallet där ena spolen är parallellkopplad med kapacitansen får vi följande samband

$$Z_{ab} = \frac{U_{ab}}{I_1} = \infty,$$

$$U_{ab} = \mathrm{j}\omega L I_1 + \mathrm{j}\omega M I_2 \text{ och } \mathrm{j}\omega L I_2 + \mathrm{j}\omega M I_1 + \frac{1}{\mathrm{j}\omega C}I_2 = 0,$$

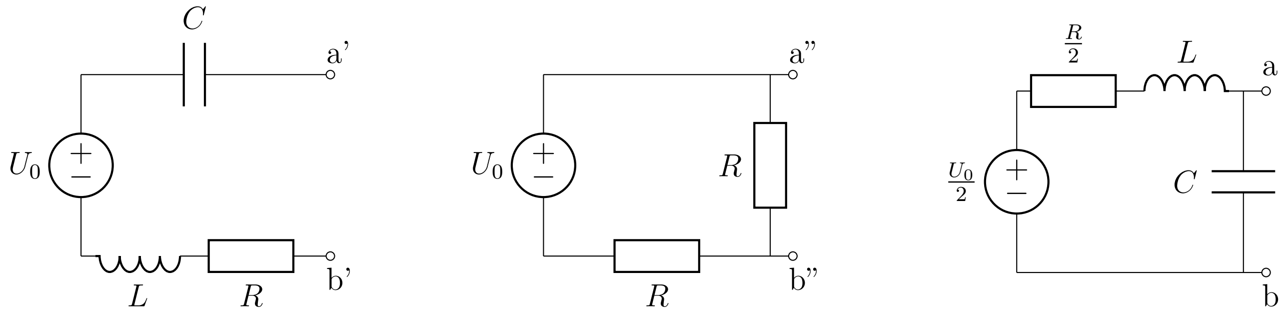
där vi har försummat spolarnas resistans. Detta ger

$$\frac{U_{ab}}{I_1} = \mathrm{j}\omega L + \mathrm{j}\omega M\left(-\frac{\mathrm{j}\omega M}{\mathrm{j}\omega L+\frac{1}{\mathrm{j}\omega C}}\right) = \mathrm{j}\omega L - \frac{\mathrm{j}\omega M^2}{L-\frac{1}{\omega^2 C}} = \infty.$$

Vi inser nu att $\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$.

B – Del

4) [5p] Vi använder successiva tvåpolekvivalenter för att bestämma Thévenin-ekvivalenten till det ursprungliga nätet enligt nedan.



(a) (b) (c)

Thévenin-ekvivalenten med avseende på a'b' (se (a)) ger $Z_{\mathrm{Th}}^{a'b'} = R + \mathrm{j}\omega L + \frac{1}{\mathrm{j}\omega C} = R$ eftersom $\omega^2 LC = 1$. Vi ser också att tomgångspänningen ger $U_{\mathrm{Th}}^{a'b'} = U_0$.

Thévenin-ekvivalenten med avseende på a"b" (se (b)) ger $Z_{\mathrm{Th}}^{a''b''} = \frac{R}{2}$. Vi får tomgångspänningen genom spänningsdelning $U_{\mathrm{Th}}^{a''b''} = U_0 \frac{R}{R+R} = \frac{U_0}{2}$.

Slutligen får vi Thévenin-ekvivalenten med avseende på ab (se (c))

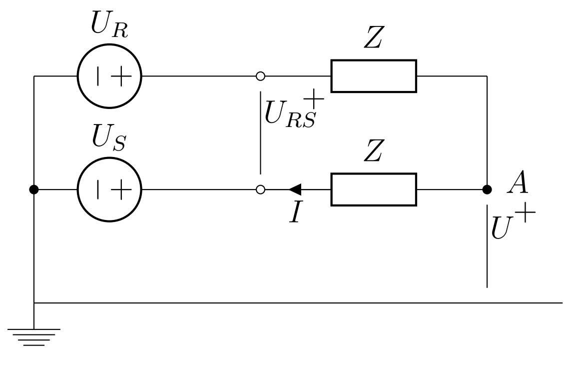
$$Z_{\mathrm{Th}}^{ab} = (\frac{R}{2} + \mathrm{j}\omega L)//(\frac{1}{\mathrm{j}\omega C}) = \frac{(\frac{R}{2} + \mathrm{j}\omega L)\frac{1}{\mathrm{j}\omega C}}{\frac{R}{2} + \mathrm{j}\omega L + \frac{1}{\mathrm{j}\omega C}} = \frac{2L}{RC} - \mathrm{j}\frac{1}{\omega C},$$

där vi använt $\omega^2 LC = 1$. Vi får tomgångspänningen genom spänningsdelning

$$U_{\mathrm{Th}}^{ab} = \frac{U_0}{2} \frac{\frac{1}{\mathrm{j}\omega C}}{\frac{R}{2} + \mathrm{j}\omega L + \frac{1}{\mathrm{j}\omega C}} = -\frac{\mathrm{j}U_0}{\omega RC}.$$

---

5) [5p] a) Summan av de tre strömmarna i varje ögonblick är lika med noll eftersom vi har ett symmetriskt, $Y-$kopplat tre-fasnät. Därför är potentialskillnaden mellan generatorns nollpunkt och lastens nollpunkt lika med noll och $U = 0$ Volt.



b) Efter avbrottet i T-fasen får vi kretsen som visas till höger. Vi ser från figuren att $U_{RS} = 2IZ$. Då får vi för den sökta aspänningen

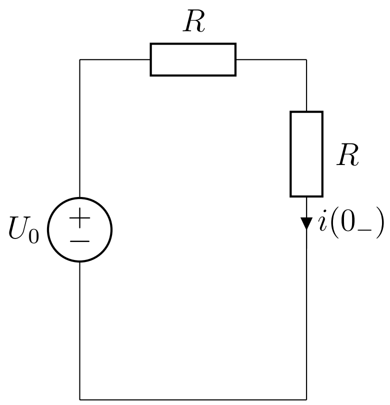
$$U = U_S + IZ = U_S + \frac{U_{RS}}{2} = U_S + \frac{U_R - U_S}{2} = \frac{U_R + U_S}{2} = -\frac{U_T}{2}.$$

Dess absoluta belopp är

$$|U| = \frac{|U_T|}{2} = \frac{|U_H|}{2\sqrt{3}}.$$

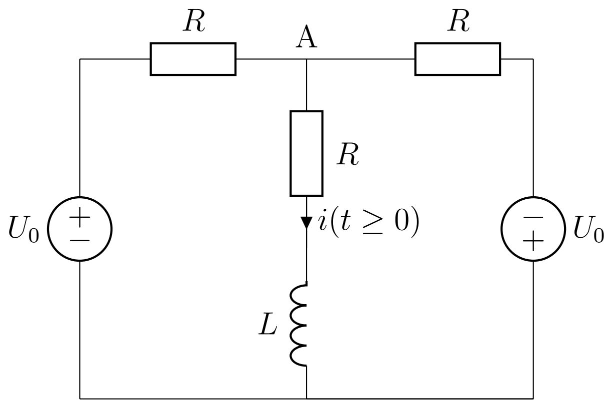
---

6) [5p] a) Stationärt tillstånd råder för $t < 0$. Vi kan rita om kretsen enligt första bilden till höger eftersom spänningen över spolen är lika med noll vid $t = 0_-$ och



$$i(0_-) = \frac{U_0}{2R}.$$

Vi får initiella värdet $i(0) = i(0_+) = i(0_-)$ eftersom strömmen genom spolen ska vara kontinuerlig.



För $t \geq 0$ får vi den nedre kretsen från vilket vi kan skriva KCL för nod A

$$\frac{U_A - U_0}{R} + i + \frac{U_A + U_0}{R} = 0,$$

vilket ger $U_A = -\frac{iR}{2}$. Vi ser också att

$$U_A = iR + L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t},$$

som kan vidare omskrivas som den homogena linjära ordinära differentialekvationen med den konstanta koefficienten $\frac{1}{\tau} = \frac{3R}{2L}$.

$$\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + \frac{i}{\tau} = 0$$

med begynnelsevillkor $i(0) = \frac{U_0}{2R}$ som har lösningen

$$i(t) = \frac{U_0}{2R}\mathrm{e}^{-\frac{3R}{2L}t}$$

b) Den totala energin som förbrukas i resistansen R som ligger i serie med spolen för tidsintervallet $(0, \infty)$ är

$$w = \int_0^\infty p(t)\mathrm{d}t = \int_0^\infty Ri^2(t)\mathrm{d}t = \int_0^\infty R\left(\frac{U_0}{2R}\mathrm{e}^{-\frac{3R}{2L}t}\right)^2 \mathrm{d}t = \int_0^\infty \frac{U_0^2}{4R}\mathrm{e}^{-\frac{3R}{L}t}\mathrm{d}t = \frac{U_0^2 L}{12R^2}.$$
