KTH EI1110 Elkretsanalys (CELTE), Tentamen (TEN2) 2016-06-09 kl 08–13

Hjälpmedel: En A4 sida, med studentens egna anteckningar.

Alla källor ska antas vara tidsharmoniska växelströmskällor om inget annat explicit anges och beteckningar såsom V_0, I_1 etc. beskriver oftast amplituden hos dessa. Om ingen annan information ges ska komponenter antas vara ideala. Angivna värden av komponenter (t.ex. R för ett motstånd, U för en spänningskälla) ska antas vara kända storheter och andra markerade storheter (t.ex. strömmen genom, eller spänningen över, ett motstånd) ska antas vara okända storheter.
Några viktiga saker för att kunna få maximalt antal poäng:

- **Endast ett problem per sida** och text på baksidan kommer inte att beaktas.
- Tänk på att er handstil måste vara tydlig för att lösningen ska kunna bedömas. **Kan vi inte läsa, kan vi inte ge poäng!**
- Lösningarna ska uttryckas i de kända storheterna och förenklas **innan** eventuella värden används. Därmed visas förståelse för problemet.
- **Ge alltid din krets** och var tydlig med diagram och definitioner av variabler. Tänk på hur du definierar polariteten och riktningen på de spänningar och strömmar du använder.
- Därtill, dela tiden mellan talen och kontrollera svarens rimlighet genom t.ex. dimensionsanalys eller alternativ lösningsmetod.

Betygsgränserna är: 50% (E), 60% (D), 70% (C), 80% (B), 90% (A).

Examinator: Daniel Månsson (08 790 9044)

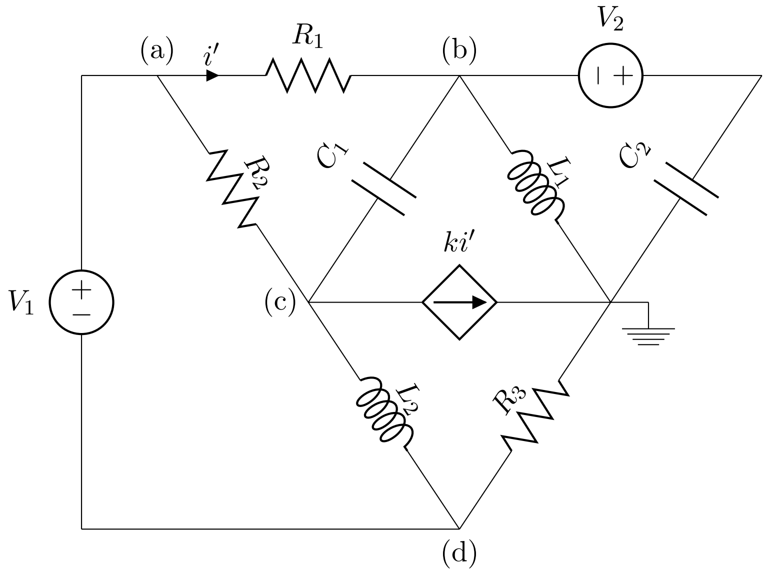
Lycka till och ta det lugnt.

Uppgift 1 [8 p.]

För kretsen nedan (källorna har samma ω):

(a) [4 p.] Ställ upp nodekvationerna för de angivna noderna.

(b) [4 p.] Ställ enbart upp de nödvändiga nodekvationerna på matrisform (dvs på formen $Ax = b$ där A är nodadmittansmatrisen, x nodspänningsvektorn och b är källvektorn). Det är viktigt här att inga överflödiga noder är med som variabler.



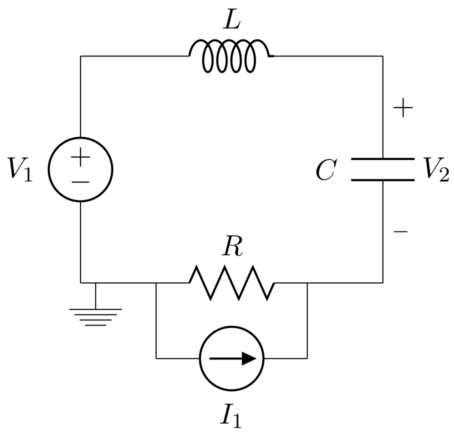
Uppgift 2 [14 p.]

För kretsen nedan (antag ett stationär tillstånd, dvs. lång tid efter alla komponenter har kopplats ihop):

(a) [6 p.] Om V_1 representerar en tidsharmonisk spänningskälla ($v_1(t) = V_1 \cos(\omega t)$ och där $\omega \neq 0$) och I_1 representerar en likströmskälla, bestäm då spänningen över kondensatorn som funktion av tiden, dvs $v_2(t)$.

(b) [7 p.] För varje ω närvarande i kretsen, visa (numeriskt) att summan av den komplexa effekten för alla komponenter (källor och impedanser) i kretsen är noll (dvs. $\sum_i S_i = 0$ är uppfyllt) separat för varje sådant ω.
Använd följande värden $R = 1$ [Ω], $Z_L = 2j$ [Ω], $Z_C = -j$ [Ω], $v_1(t) = 10\cos(\omega_1 t)$ [V], $I_1 = 3$ [A].

(c) [1 p.] Utifrån ovan, kommer I_1 att påverka den komplexa effekten som totalt utvecklas i kondensatorn? Motivera ditt svar.

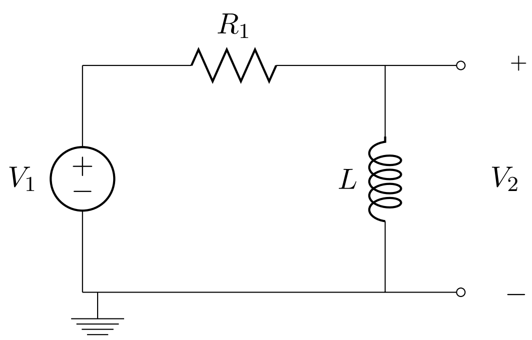


Uppgift 3 [8 p.]

Antag att vi har kretsen nedan.

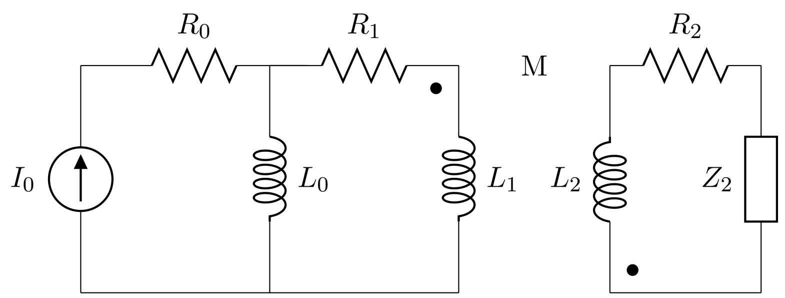
(a) [7 p.] En förlust term (representerad av en extra resistor, R_2) förs in i kretsen antingen i serie med R_1 eller parallellt med L.
Studera (och rita) överföringsfunktionen, $H(\omega)$, samt eventuella brytfrekvenser ω' för de två fallen och jämför för fallet utan R_2.
Tips, studera $H(0), H(\infty)$ samt $H(\omega')$ för fallen.

(b) [1 p.] Argumentera för vilket av de två fallen är sämre.



Uppgift 4 [8 p.]

Nedan finns en krets i vilken en känd generator (I_0, R_0 och L_0) är kopplad till en känd last (Z_2) genom en transformator. Antag en generell transformator (du antas veta R_1, R_2, L_1, L_2 och M).
Ställa upp nödvändiga ekvationssystem/relationer som behövs lösas och visa tydligt hur de ska behandlas för att kunna bestämma de reaktiva effekterna som utvecklas i L_1 och L_2.
Du måste tydligt visa, och i ord beskriva, din plan för hur problemet ska lösas för att få poäng.



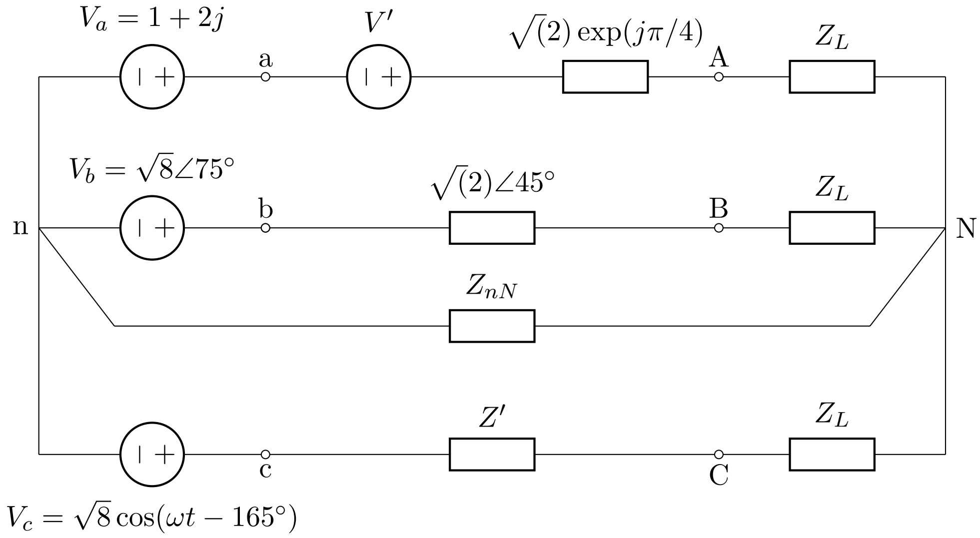
Uppgift 5 [7 p.]

För kretsen nedan:

(a) [3 p.] Balansera trefassystemet genom att bestämma $V' = a + bj$ samt $Z' = R' \pm jX'$.

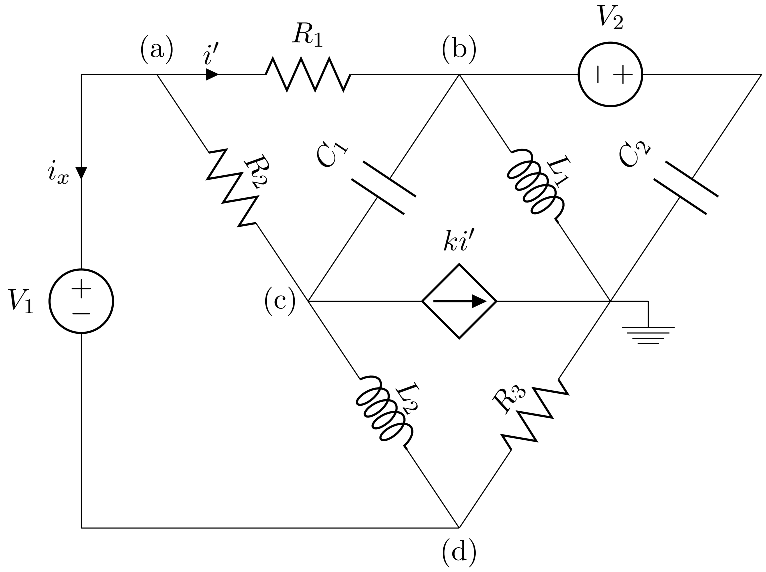
(b) [1 p.] Ange hur stora förlusterna i återledaren (”nN”) blir då.

(c) [3 p.] Bestäm (algebraiskt) vad den totalt förbrukade aktiva effekten i trefaslasten (som utgörs av de tre Z_L) blir då.


$V_a = 1 + 2j$
V'
$\sqrt(2)\exp(j\pi/4)$
Z_L
a
A
$V_b = \sqrt{8}\angle 75°$
$\sqrt(2)\angle 45°$
Z_L
n
b
B
N
Z_{nN}
Z'
Z_L
c
C
$V_c = \sqrt{8}\cos(\omega t - 165°)$

KTH EI1110 Elkretsanalys (CELTE), Tentamen (TEN2) 2016-06-9 kl 8–13; Lösningsförslag.

Uppgift 1



(1a) Vi har noderna givna och använder oss av KCL i dessa och får:

$$(V_a - V_b)\frac{1}{R_1} + (V_a - V_c)\frac{1}{R_2} + i_x = 0 \tag{1}$$

$$(V_b - V_a)\frac{1}{R_1} + (V_b - V_c)(j\omega C_1) + V_b\frac{1}{j\omega L_1} + (V_b + V_2)(j\omega C_2) = 0 \tag{2}$$

$$(V_c - V_a)\frac{1}{R_2} + (V_c - V_b)(j\omega C_1) + (V_c - V_d)\frac{1}{j\omega L_2} + ki' = 0 \tag{3}$$

$$(V_d - V_c)\frac{1}{j\omega L_2} + V_d\frac{1}{R_3} - i_x = 0 \tag{4}$$

Här är strömmen i_x strömmen som går genom V_1 från nod a till nod d. Vi skulle kunna vända den på andra hållet och få samma nodspänningar efter en uträkning.

(1b) Vi behöver inte alla noderna för att bestämma dem. T.ex. så har vi sambandet $V_a - V_1 = V_d$. Därtill vet vi att $i' = (V_a - V_b)\frac{1}{R1}$ och vi kan även använda ekvationen för nod d och få uttrycket för i_x som vi kan sätta in i ekvationen för nod a. Vi behöver endast tre ekvationer för att lösa ut allt, sätter vi in det ovan och samlar termerna får vi

$$V_a(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_3}+\frac{1}{j\omega L_2})+V_b(-\frac{1}{R_1})+V_c(-\frac{1}{R_2}-\frac{1}{j\omega L_2})=V_1(\frac{1}{j\omega L_2}+\frac{1}{R_3}) \tag{5}$$

$$V_a(-\frac{1}{R_1})+V_b(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{j\omega L_1}+j\omega C_1+j\omega C_2)+V_c(-j\omega C_1)=V_2(-j\omega C_2) \tag{6}$$

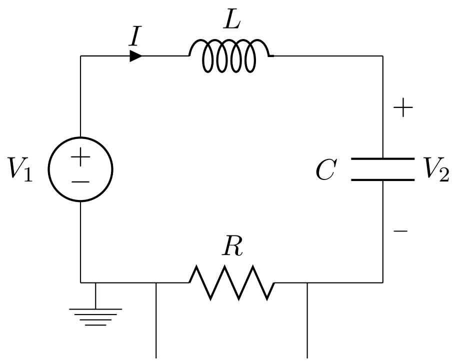
$$V_a(-\frac{1}{R_2}-\frac{1}{j\omega L_2}+\frac{k}{R_1})+V_b(-j\omega C_1-\frac{k}{R_1})+V_c(\frac{1}{R_2}+j\omega C_1+\frac{1}{j\omega L_2})=V_1(-\frac{1}{j\omega L_2}) \tag{7}$$

Samlar vi nu termerna och sätter upp dem på matrisform får vi:

$$\begin{pmatrix} (\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_3}+\frac{1}{j\omega L_2}), (-\frac{1}{R_1}), (-\frac{1}{R_2}-\frac{1}{j\omega L_2}) \\ (-\frac{1}{R_1}), (\frac{1}{R_1}+\frac{1}{j\omega L_1}+j\omega C_1+j\omega C_2), -(j\omega C_1) \\ (-\frac{1}{R_2}-\frac{1}{j\omega L_2}+\frac{k}{R_1}), (-j\omega C_1-\frac{k}{R_1}), (\frac{1}{R_2}+j\omega C_1+\frac{1}{j\omega L_2}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_a \\ V_b \\ V_c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V_1(\frac{1}{\jmath\omega L_2}+\frac{1}{R_3}) \\ -V_2(j\omega C_2) \\ V_1(-\frac{1}{j\omega L_2}) \end{pmatrix}$$

Uppgift 2

(2a) I detta fallet måste vi använda superposition (eftersom de två källorna har olika frekvenser ($\omega = 0$ är också en frekvens...)). Vi börjar med att titta på V_1 och nollställer I_1 (som blir ett avbrott) och vi får en krets som ser ut såsom:

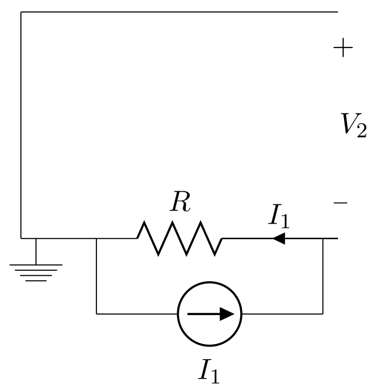


En KVL runt kretsen ger oss:

$$+V_1 - IZ_L - IZ_C - IR = 0 \Leftrightarrow I = \frac{V_1}{Z_L + Z_C + R} \tag{8}$$

Vi får nu $V_2(\omega) = IZ_C = V_1\frac{Z_c}{Z_L+Z_C+R}$.

Härefter så nollställer vi V_1 och får då en kortslutning där. För I_1 kommer impedanserna att anta sina stationär DC motstånd och vi får en krets som ser ut såsom:



En kort KVL ger oss (tänk på att strömmen I_1 är den enda i kretsen nu och hur den går genom R i relation till vår potentialvandring):

$$+V_2 + I_1 R = 0 \leftrightarrow V_2(\omega) = -I_1 R \tag{9}$$

Båda dessa $V_2(\omega)$ är givna i frekvensdomänen (även om den senare är samma i tidsdomänen) och vi omvandlar dem var för sig och totala $v_2(t)$ blir summan av dem:

$$v_2(t) = A\cos(\omega t + \phi) - I_1 R \tag{10}$$

$$A = \left| V_1 \frac{Z_c}{Z_L + Z_C + R} \right| = V_1 \left(\frac{\sqrt{(\frac{1}{\omega C})^2}}{\sqrt{R^2 + (\omega L \text{ - } \frac{1}{\omega C})^2}} \right) \tag{11}$$

$$\phi = \arg\left(V_1 \frac{Z_c}{Z_L + Z_C + R} \right) = 0 + (-\pi/2) - \arg\left(j\omega L + \frac{1}{j\omega C} + R \right) \tag{12}$$

Eftersom vi saknar numeriska värde så är det ingen mening att gå vidare med att i detalj ta fram A och ϕ (speciellt ϕ kan ändra tecken beroende på värdena).

(2b)

Formuleringen i uppgiften "För varje ω närvarande i kretsen" kan kanske skapa förvirring. Det som menas är att vi tittar på de komplexa effekterna från en källa när den andra är avstängd. **Obs!** *Man kan INTE använda superposition vid beräknadet av komplex effekt i en komponent där det finns två (eller flera) skilda ω! Detta pga. att strömmen genom komponenten är $I_{tot} = I_1 + I_2$ och att $S_{tot} \sim |I_{tot}|^2$ där $I_{tot}^2 = I_1^2 + I_2^2 + 2I_1I_2 \neq I_1^2 + I_2^2$. Därför är $S_{tot} \neq S_1 + S_2$.*

Vi får följande komplexa effekter för växelströmsdelen.

- $S_{V_1} = -V_1 I^* = -V_1 \left(\frac{V_1}{Z_L + Z_C + R}\right)^* = -50 - 50j$ (vår definierade ström, lämnar "+" terminalen så vi får ett minustecken).

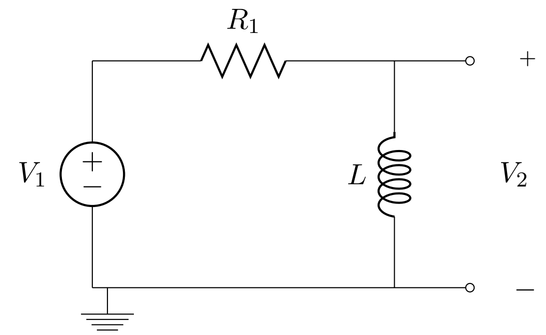
- $S_L = V_L I^* = Z_L I I^* = 100j$ (> 0 som väntat, en induktans absorberar reaktiv effekt)
- $S_C = V_C I^* = Z_C I I^* = -50j$ (< 0 som väntat, en kapacitans levererar reaktiv effekt)
- $S_R = V_L I^* = R I I^* = 50$ (rent reell och absorberar aktiv effekt)
- $\sum S_i = S_{V_1} + S_L + S_C + S_R = -50 - 50j + 100j - 50j + 50 = 0$

Vi får följande "komplexa" effekter för likströmsdelen (det är en filosofisk fråga huruvida ett rent reellt tal är ett komplext tal med imaginär delen = 0).

- $S_{I_1} = -V_R I_1^* = -R I_1 I_1^* = -9$ (vår ström I_1, lämnar "+" terminalen av den spänningen vi definierar som är samma som spänningen över R så vi får ett minustecken).
- $S_R = V_R I_1^* = R I_1 I_1^* = 9$ (rent reell och absorberar aktiv effekt)
- $\sum S_i = S_{I_1} + S_R = -9 + 9 = 0$

(2c) Vi dra slutsatsen att I_1 inte påverkar den komplexa effekten som utvecklas i C eftersom det i det stationära tillståndet inte går någon ström genom C från I_1 och därmed blir $S_C = VI^* = Z_C I I^* = 0$. (Jämför resonemanget i sista uppgiften kring förbrukad effekt i återledaren i ett balanserat tre-fassystem.)
Alternativt kan man säga att impedansen som C har för DC strömmar är oändlig och vi får $S_C = VI^* = \frac{VV^*}{Z_C} = 0$.

Uppgift 3



(3a) Här har vi ett högpass filter, $H_0 = \frac{j\omega}{j\omega + R_1/L}$, med bryt/gränsfrekvensen $\omega' = R_1/L$. Vi har nu en förslut term, R_2, som vi sätter på två sätt.
Fall 1, i serie med R_1:

Vi får en överföringsfunktion som ser ut såsom $H_1 = \frac{j\omega}{j\omega+(R_1+R_2)/L}$ och $\omega' = (R_1+R_2)/L$. Vi kan kanske ana nu att beteendet på H_1 kommer att vara snarlikt H_0 men alltid med högre brytfrekvens (ty $R_2 > 0$).

Fall 2, parallellt med L:

Vi får att $Z = \frac{j\omega L R_2}{j\omega L+R_2}$ och en överföringsfunktion som ser ut såsom:

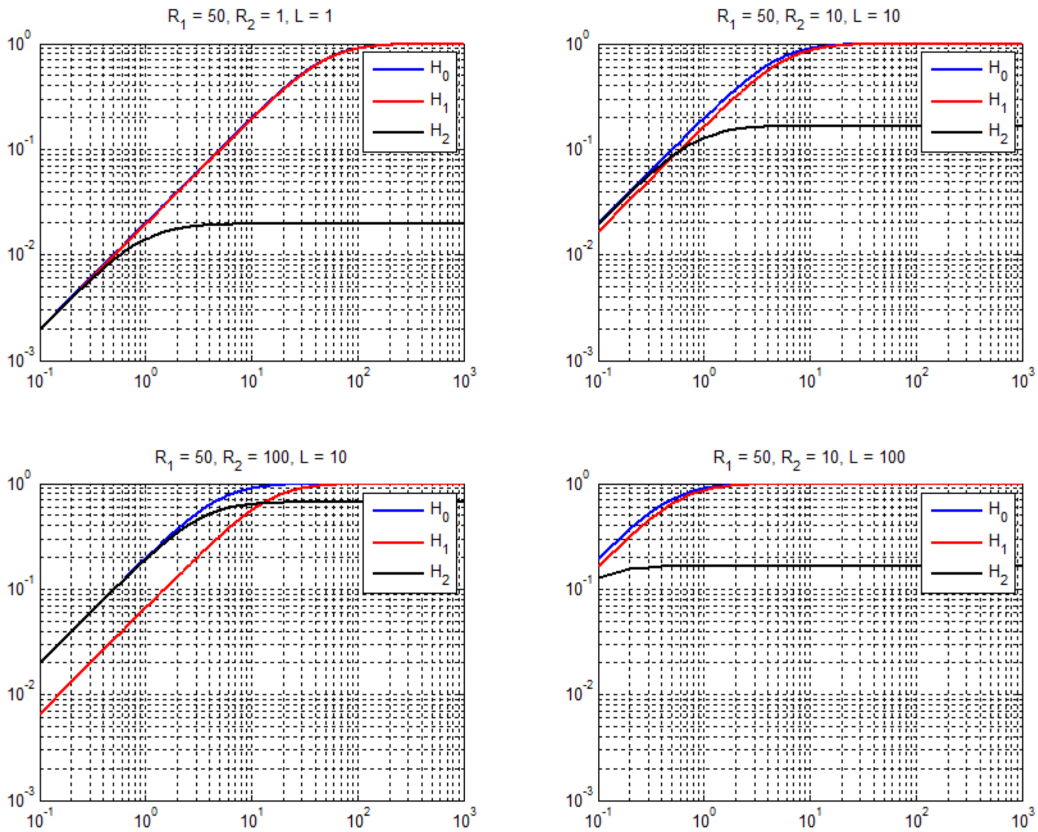
$$H_2 = \frac{Z}{Z+R_1} = \frac{\frac{j\omega L R_2}{j\omega L+R_2}}{\frac{j\omega L R_2}{j\omega L+R_2}+R_1} = \frac{R_2 j\omega L}{R_2 j\omega L + R_1\left(R_2+j\omega L\right)} = \tag{13}$$

$$\frac{j\omega L}{j\omega L + R_1 + \frac{R_1}{R_2}j\omega L} = \frac{j\omega L}{j\omega L\left(1+\frac{R_1}{R_2}\right)+R_1} = \frac{j\omega K}{j\omega + \frac{R_1}{L}K} \tag{14}$$

$$K = \frac{1}{1+\frac{R_1}{R_2}} = \frac{R_2}{R_1+R_2} \tag{15}$$

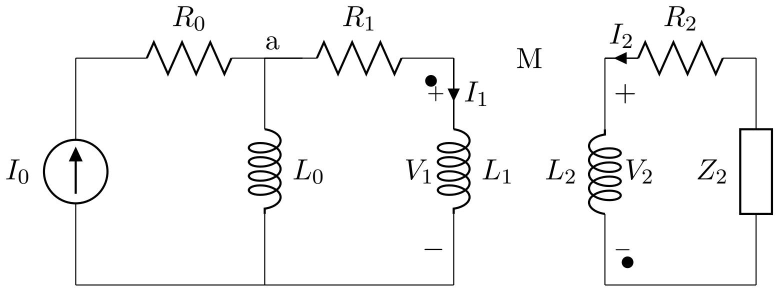
Som tidigare, ser vi att vår brytfrekvens ligger vid $\omega' = \frac{R_1}{L}K$. (Här måste man vara försiktigt när man definierar sin brytfrekvens vilken egentligen säger när $|H_2|$ har fallet till $\frac{1}{\sqrt{2}}$ av sitt max värde (som <u>inte</u> är 1) utan beror på K.)

Om vi tittar på H_2 så ser vi att, pga. $K < 1$, att ha ett mindre värde i passbandet och att brytfrekvensen kommer, pga samma anledning, vara mindre än för H_1. Vi har därtill, $H_0(0) = H_1(0) = H_2(0) = 0$, $H_0(\infty) = H_1(\infty) \to 1$ samt $H_2(\infty) \to K < 1$. Om vi plottar , H_0, H_1, H_2 för några värden får vi:



(3b) Utifrån detta kan man argumentera att H_1 är bättre än H_2 eftersom i passbandet dämpar den inte in-signal såsom H_2 gör (pga. $K < 1$). Därtill så ligger brytfrekvensen för H_1 nära H_0 om $R_2 \leq R_1$.

Uppgift 4



Vi behöver veta strömmarna som går genom L_1 och L_2.
Vi börjar med att definiera nodspänningen V_a, spänningsfallen V_1 och V_2 samt strömmarna I_1, I_2 i kretsen. Det är viktigt att man får sin polaritet på spänningsfallen rätt jämfört med hur strömmarna är riktade genom lindningarna. Vi börjar med att göra en KCL vid noden a:

$$-I_0 + \frac{V_a}{j\omega L_0} + I_1 = 0 \Leftrightarrow V_a = (I_0 - I_1)\, j\omega L_0 \tag{16}$$

Vi gör sedan en spänningsvandring (KVL) runt maskan med L_1:

$$+V_a - I_1 R_1 - V_1 = 0 \rightarrow (I_0 - I_1)\, j\omega L_0 - I_1 R_1 - V_1 = 0 \tag{17}$$

Vi behöver veta V_1 också.
Eftersom prickarna som indikerar hur lindningarna på transformatorns spolar är gjorda (alternativt hur spolarna är riktade) är placerade som de är så kommer vi att få destruktiv interferens i flödena (och vi får därför minustecknen nedan):

$$V_1 = j\omega L_1 I_1 - j\omega M I_2 \tag{18}$$
$$V_2 = j\omega L_2 I_2 - j\omega M I_1 \tag{19}$$

Vi kan sätta in uttrycket för V_1 i uttrycket från spänningsvandringen och då får vi:

$$-I_1\,(j\omega L_0 + R_1) + I_0 j\omega L_0 = j\omega L_1 I_1 - j\omega M I_2 \Leftrightarrow \tag{20}$$
$$-I_1\,(j\omega L_0 + R_1 + j\omega L_1) + j\omega M I_2 = -I_0 j\omega L_0 \tag{21}$$

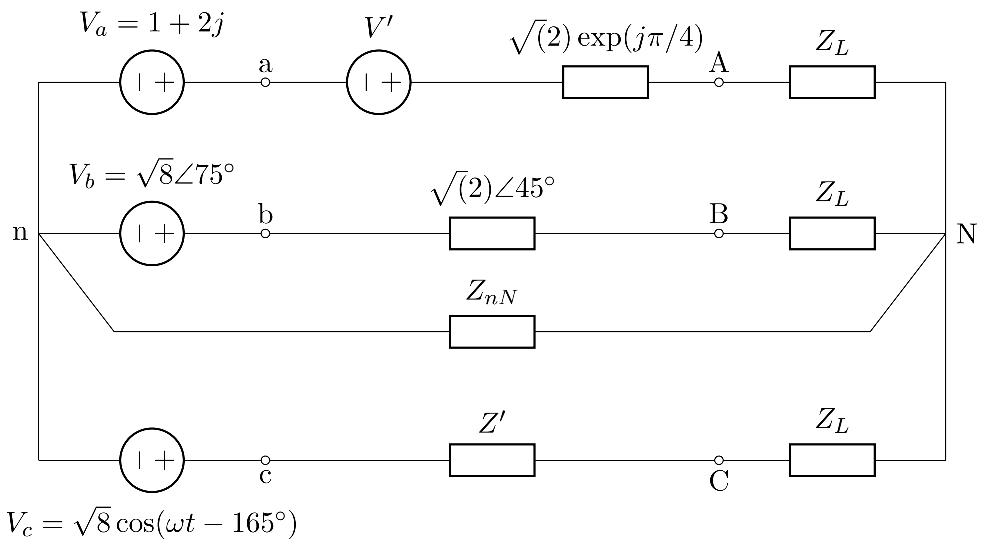
Nu har vi en ekvation och två okända och lämnar primärsidan av transformatorn ett tag och vi gör en spänningsvandring (KVL) runt maskan med L_2 som ger (t.ex.) med V_2 sen insatt:

$$-I_2 Z_2 - I_2 R_2 - V_2 = 0 \rightarrow \tag{22}$$
$$-I_2 Z_2 - I_2 R_2 - (j\omega L_2 I_2 - j\omega M I_1) = 0 \Leftrightarrow \tag{23}$$
$$I_1 j\omega M - I_2\,(Z_2 + R_2 + j\omega L_2) \tag{24}$$

Vi har nu ett ekvationssystem i kända storheter (impedanserna och I_0) och med de okända strömmarna I_1 och I_2 som vi kan lösa. Därmed kan vi få strömmarna genom L_1 och L_2 och de reaktiva effekterna, Q_i ur $S_i = P_i + jQ_i$, som utvecklas däri:

$$Q_{Z_{L_1}} = Im\{V_{L_1} I_1^*\} = Im\{j\omega L_1 I_1 I_1^*\} \tag{25}$$
$$Q_{Z_{L_2}} = Im\{V_{L_2} I_2^*\} = Im\{j\omega L_2 I_2 I_2^*\} \tag{26}$$
$$\tag{27}$$

Uppgift 5



(5a) För att balansera behöver vi ha att fasens (komplexa) källor ska vara $V_a + V_b + V_c = 0$ vilket ger oss att $|V_a| = |V_b| = |V_c|$ samt att $1 + \exp(-j2\pi/3) + \exp(j2\pi/3) = 0$. För att vi ska få ± 120 graders förskjutning $(\exp(\pm 2j\pi/3))$ mellan fasornas källor så ska vi ha ett argument för V' på $75° - 120° = -45°$ (eller $-165° + 120° = -45°$). Därtill så ser vi att magnituden ska vara $\sqrt{8}$. Det enda som kan uppfylla detta är om $V_a + V' = 2 - 2j$. Detta ger oss att $V' = 1 - 4j$.
Vi ser att $Z' = \sqrt(2)\angle 45°$ och med kartesiska koordinater får vi detta till $Z' = 1 + j$ (dvs en resistor på 1 Ω och en induktans med impedansen j Ω).

(5b) 0, ty ingen ström flyter vid balans och därmed utvecklas ingen effekt däri (jämför med den tidigare uppgiften kring kondensatorn och likströmskällan...).

(5c)

Vid balans kan vi titta på en fas och relatera den till den totala effekten i trefaslasten. En spänningsvandring (KVL) ger oss (t.ex.):

$$+V_b - IZ - Z_L = 0 \rightarrow I = \frac{V_b}{Z + Z_L} \tag{28}$$

(Här är $Z = 1 + j = \sqrt(2)\angle 45° = \sqrt(2)\exp(j\pi/4)$ enligt ovan.)
Den total förbrukade aktiva effekten i tre-fas lasten blir då

$$P = 3Re\{V_{Z_L} I^*_{Z_L}\} = 3Re\{Z_L I_{Z_L} I^*_{Z_L}\} = \tag{29}$$

$$3Re\{Z_L \left(\frac{V_b}{Z + Z_L}\right)\left(\frac{V_b}{Z + Z_L}\right)^*\} = 3Re\{Z_L \left|\frac{V_b}{Z + Z_L}\right|^2\} \tag{30}$$