KTH ei1110 Elkretsanalys (CELTE), tentamen (TEN2) 2017-03-14 kl 08–13.

Hjälpmedel: En A4 sida, med studentens egna anteckningar.

Alla källor ska antas vara tidsharmoniska växelströmskällor om inget annat explicit anges och beteckningar såsom V_0, I_1 etc. beskriver oftast amplituden hos dessa. Om ingen annan information ges ska komponenter antas vara ideala. Angivna värden av komponenter (t.ex. R för ett motstånd, U för en spänningskälla) ska antas vara kända storheter och andra markerade storheter (t.ex. strömmen genom, eller spänningen över, ett motstånd) ska antas vara okända storheter. Antag **stationärt tillstånd**, dvs. lång tid efter alla komponenter har kopplats ihop.
Några viktiga saker för att kunna få maximalt antal poäng:

- **Endast ett problem per sida** och text på baksidan kommer inte att beaktas.
- Tänk på att er handstil måste vara tydlig för att lösningen ska kunna bedömas. **Kan vi inte läsa, kan vi inte ge poäng!** Använd **inte rödpenna**.
- Lösningarna ska uttryckas i de kända storheterna och förenklas **innan** eventuella värden används. Därmed visas förståelse för problemet.
- **Ge alltid din krets** och var tydlig med diagram och definitioner av variabler. Tänk på hur du definierar polariteten och riktningen på de spänningar och strömmar du använder. Om det fattas figur med definierade variabler utsatta kan det bli **avdrag** vid tvetydighet. Var noga med definitionen av impedanserna, t.ex. en spoles impedans är inte "L", detta kan ge avdrag.
- Därtill, dela tiden mellan talen och kontrollera svarens rimlighet genom t.ex. dimensionsanalys eller alternativ lösningsmetod.

Betygsgränserna är: 50% (E), 60% (D), 70% (C), 80% (B), 90% (A).
För (Fx) krävs $> 45\%$ samt att inte mer än ett tal har poängen x sådan att $0 < x < 50\%$.
(Med detta menas att för att få Fx får endast ett tal dra ner resultatet under godkänt.)

Examinator: Daniel Månsson (08 790 9044)

Lycka till och ta det lugnt!

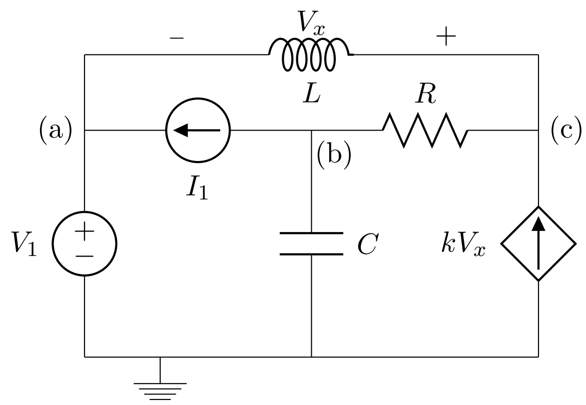
Uppgift 1 [11 p.]

För kretsen nedan (källorna har samma ω):

(a) [3 p.] Använda KCL och ställ upp ekvationerna för de angivna noderna.

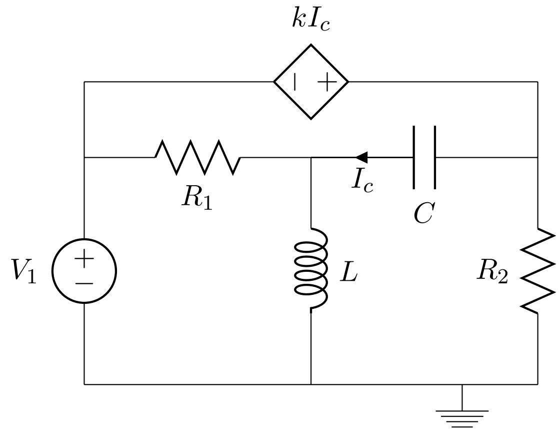
(b) [3 p.] Ställ enbart upp de nödvändiga nodekvationerna på matrisform (dvs på formen $Ax = b$ där A är nodadmittansmatrisen, x nodspänningsvektorn och b är källvektorn). Det är viktigt att inga överflödiga noder är med här som variabler.

(c) [5 p.] Visa att summan av den komplexa effekten från alla komponenter (källor och impedanser) i kretsen är noll (dvs. att $\sum S = 0$ är uppfyllt).



Uppgift 2 [6 p.]

För kretsen nedan:
Om V_1 representerar en tidsharmonisk spänningskälla ($v_1(t) = V_1 \cos(\omega t + \alpha)$ och där $\omega \neq 0$), använd nodanalys och bestäm strömmen genom kondensatorn som funktion av tiden, dvs $i_c(t) = I_c \cos(\omega t + \beta)$.
Använd följande: $R_1 = R_2 = 1$ [Ω], $k = 1$ [Ω], $Z_L = j$ [Ω], $Z_C = -j$ [Ω], $V_1 = 1$ [V].
Obs, sätt endast in värdena i slutet av din analys så visar du din förståelse!

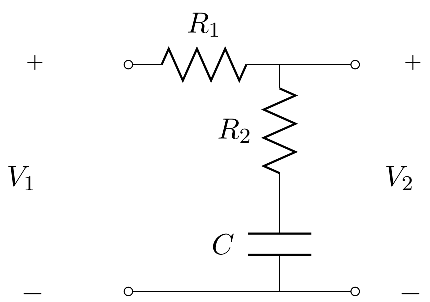


Uppgift 3 [7 p.]

Antag att vi har kretsen nedan.

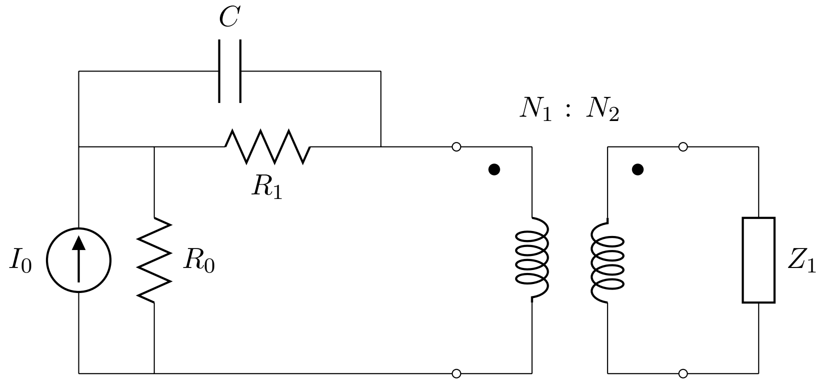
(a) [6 p.] Härled överföringsfunktionen, $H(\omega)$, samt studera den genom att rita Bodediagrammet för förstärkningen, dvs. $|H(\omega)|$ (inkluderat värden på dess nivåer och intressanta brytfrekvenser).

(b) [1 p.] Argumentera trovärdigt (men kortfattat) för en fördel med denna typen av filter.



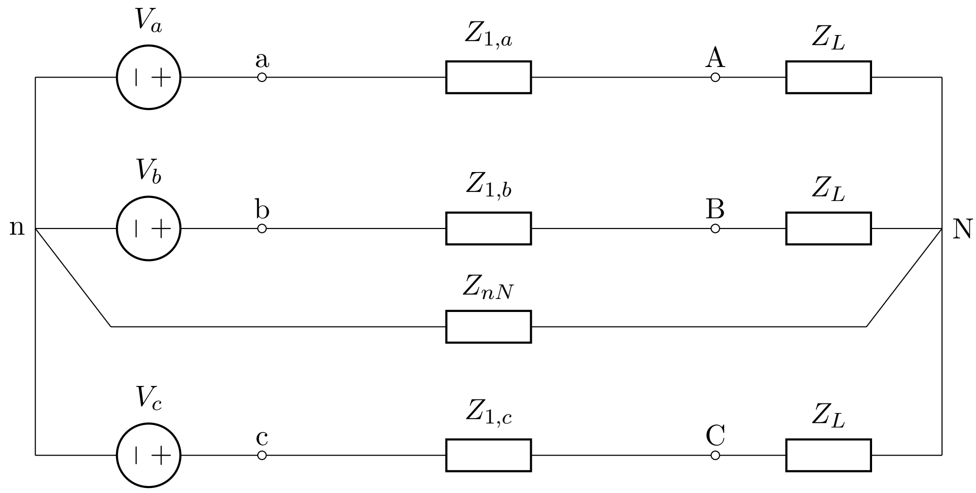
Uppgift 4 [5 p.]

Nedan finns en krets kopplad till en transformator (som har en last Z_1). Bestäm $\cancel{Z_1 = R_1 \pm jX_1}$, $Z_1 = R \pm jX$ så att maximalt med aktiv effekt utvecklas i Z_1.



Uppgift 5 [4 p.]

Ge det korrekta svaret på flervalsfrågorna. Endast ett svar på varje fråga är rätt och ingen motivering behövs.



1. [1 p.] För ett balanserat trefassystem, om effekten i lasten i fasen ‘a‘ (i.e., Z_L) är x, vad är då effekten i lasten i fasen ‘b‘? (Antag abc-sekvens).
   (a) $x/\sqrt(2)$
   (b) $x\angle(-2\pi/3)$
   (c) x
   (d) $3x$

2. [1 p.] Antag att man kunde, med en voltmeter, få tillgång till impedansen Z_{nN} i ett balanserat trefassystem. Vilket spänningsfall skulle man mäta över impedansen?

(a) $V_a * Z_{nN}/(Z_{1,a} + Z_A)$
(b) 0
(c) $|V_{an} - V_{AN}|\angle(V_{an} - V_{AN})$
(d) $\propto Va\angle(Z_{1,a} - Z_A)$

3. [1 p.] Vilket alternativ representerar en balanserad trefaskälla (cosinus som referens):

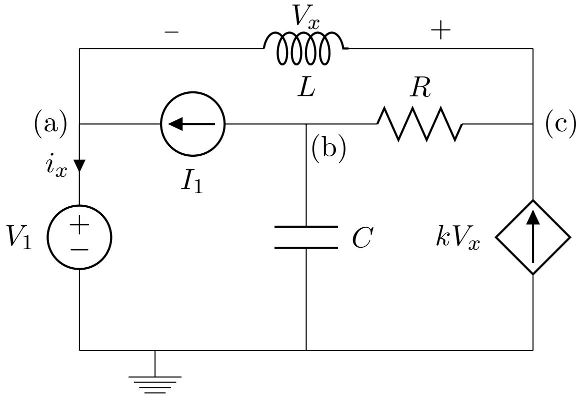
   (a) $V_a = 1 - j$, $V_b = \sqrt(2)\angle 90°$, $V_c = 1e^{-j\frac{\pi}{2}}$
   (b) $V_a = 2 - 2j$, $V_b = \sqrt(4)\cos(\omega t - 120°)$, $V_c = \sqrt(4)e^{-j\frac{2\pi}{3}}$
   (c) $V_a = 2 + 2j$, $V_b = \sqrt(8)\angle + 120°$, $V_c = \sqrt(8)e^{-j\frac{\pi}{2}}$
   (d) inget av ovan

4. [1 p.] I ett balanserat trefassystem är den aktiva effekten i lasten i fasen 'a' (i.e., Z_L) 100 W och den reaktiva effekten är 100 VAr. Vad är fasförskjutningen mellan spänningen över, och strömmen, genom lasten i fasen 'c'?

   (a) $\pi/4$
   (b) $\pm 120°$
   (c) $\pi/2$
   (d) $\angle V = \angle I^*$

KTH ei1110 Elkretsanalys (CELTE), tentamen (TEN2) 2017-03-14 kl 08–13; Lösningsförslag.

Uppgift 1



(1a) Vi har noderna givna och tittar på hur strömmarna summeras i dessa (dvs KCL, $\sum I = 0$).

$$\frac{v_a - v_c}{j\omega L} - I_1 + i_x = 0 \tag{1}$$

$$I_1 + \frac{v_b - 0}{1/(j\omega C)} + \frac{v_b - v_c}{R} = 0 \tag{2}$$

$$\frac{v_c - v_b}{R} + \frac{v_c - v_a}{j\omega L} - kv_x = 0 \to \frac{v_c - v_b}{R} + \frac{v_c - v_a}{j\omega L} - k\left(v_c - v_a\right) = 0 \tag{3}$$

Vi har använt gjort en spänningsvandring (KVL, $\sum V = 0$) för sista delen för nod "c": $v_a + v_x - v_c = 0 \to v_x = v_c - v_a$.

(1b) För att kunna beräkna nodspänningarna (och annat intressant i kretsen) så behöver vi endast två av dessa ekvationer (de för nod "b" och nod "c") eftersom $v_a = V_1$. Vi sorterar och samlar termer så vi får:

$$v_b\left(j\omega C + \frac{1}{R}\right) + v_c\left(\frac{-1}{R}\right) = -I_1 \tag{4}$$

$$v_b\left(\frac{-1}{R}\right) + v_c\left(\frac{1}{j\omega L} + \frac{1}{R} - k\right) = -kV_1 + V_1\frac{1}{j\omega L} \tag{5}$$

Vi har ställt upp det enligt "$Ax = b$" dvs sorterar ut alla "källtermer" till H.L och har nu två ekvationer med endast impedanserna och de okända variablerna (dvs. nodspänningarna). Till sist får vi då detta på matrisform:

$$\begin{pmatrix} j\omega C + \frac{1}{R}, \frac{-1}{R} \\ \frac{-1}{R}, \frac{1}{j\omega L} + \frac{1}{R} - k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_a \\ v_b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -I_1 \\ -kV_1 + V_1 \frac{1}{j\omega L} \end{pmatrix}$$

(1c) För att göra detta kan man lösa ut matrisen ovan men det är onödigt krångligt. Vi definierar några egna strömmar och får följande komplexa effekter för de olika komponenterna i kretsen.

- $S_{V_1} = -V_1 I_a^*$
  (vår definierade ström, lämnar "+" terminalen så vi får ett minustecken).
- $S_{I_1} = (v_b - V_1) I_1^*$
  (strömmen, lämnar inte "+" terminalen av spänningsfallet).
- $S_C = (v_b - 0) I_b^*$
  (vi definierar en ström, I_b, som går ner genom kondensatorn och därmed lämnar den inte "+" terminalen av spänningsfallet).
- $S_R = (v_b - v_c) I_R^*$
  (vi definierar en ström, I_R, som går genom resistorn från nod "b" till nod "c" och därmed lämnar den inte "+" terminalen av spänningsfallet).
- $S_{v_x} = -(v_c - 0)(kv_x)^*$
  (strömmen, lämnar "+" terminalen av spänningsfallet).
- $S_L = v_x I_L^* = (v_c - v_1) I_L^*$
  (vi definierar en ström, I_L, som går genom spolen från nod "b" till nod "a" och därmed lämnar den inte "+" terminalen av spänningsfallet).

Nu studerar vi strömmarna och använder oss av KCL i noderna:

$$-I_a - I_1 - I_L = 0 \rightarrow I_L = -I_a - I_1 \tag{6}$$

$$I_1 + I_b + I_R = 0 \rightarrow I_R = -I_1 - I_b \tag{7}$$

$$-kv_x - I_R + I_L = 0 \rightarrow kv_x = -I_R + I_L \rightarrow \tag{8}$$

$$kv_x = -(-I_1 - I_b) + (-I_a - I_1) = I_b - I_a \tag{9}$$

(Man kan definiera sin strömmar i början lite annorlunda och på så sätt få extra minustecken framför uttrycken men då kommer KCL bli annorlunda och tecknen tar då ut varandra. För att verkligen veta om en komponent levererar eller absorberar komplex effekt så behöver vi veta värdena på alla spänningar och strömmar, men det behöver vi inte för uppgiften här.)

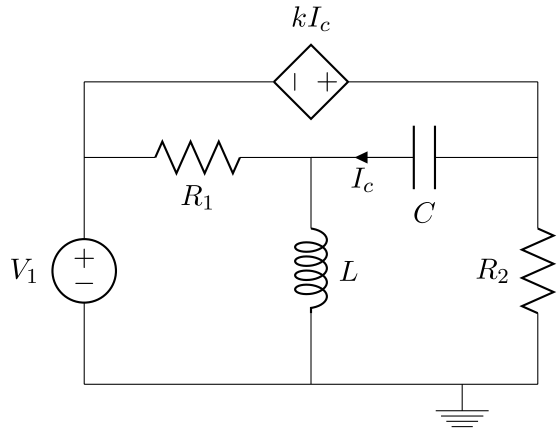
Nu sätter vi samman det vi vet och får:

$$\sum S = S_{V_1} + S_{I_1} + S_C + S_R + S_{v_x} + S_L = \tag{10}$$

$$-V_1 I_a^* + (v_b - V_1) I_1^* + v_b I_b^* + (v_b - v_c)(-I_1 - I_b)^* - v_c (I_b - I_a)^* + (v_c - V_1)(-I_a - I_1)^* \tag{11}$$

Samlar man nu ihop termerna ser man att $\sum S = 0$.

Uppgift 2



Vi ska bestämma strömmen genom kondensatorn med definierade riktningen. Vi börjar med att (t.ex.) göra en nodanalys i punkten som "L", "R1" och "C" delar och kallar den "a" och noden som bl.a. delas av R_2 och C kallar vi "b":

$$\frac{v_a - V_1}{R_1} + \frac{v_a}{j\omega L} + \frac{v_a - v_b}{1/(j\omega C)} = 0 \tag{12}$$

Därefter gör vi en spänningsvandring (KVL) och får:

$$0 + V_1 + kI_c - v_b = 0 \tag{13}$$

Vi noterar att strömmen av intresse är:

$$I_c = \frac{v_b - v_a}{1/\left(j\omega C\right)} \tag{14}$$

Använd detta på spänningsvandringen och vi får:

$$V_1 + kj\omega C\left(v_b - v_a\right) = v_b \rightarrow \tag{15}$$

$$v_b = \frac{V_1 - kj\omega C v_a}{1 - kj\omega C} \tag{16}$$

Detta kan vi sätta in i vår nodanalys och efter att ha samlat termerna något får vi:

$$v_a\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{j\omega L}\right) - \frac{V_1}{R_1} + \frac{1}{1/(j\omega C)}\left(v_a - \frac{v_1 - kj\omega C v_a}{1 - kj\omega C}\right) = 0 \tag{17}$$

Om vi nu sätter in våra numeriska värden får vi en ekvation som går att hantera:

$$v_a\left(\frac{1}{1} + \frac{1}{j}\right) - \frac{1}{1} + \frac{1}{-j}\left(v_a - \frac{1 - jv_a}{1 - j}\right) = 0 \tag{18}$$

Från denna kan vi lösa ut och få att $v_a = j$. Om vi stoppar in detta i ekvationen ovan kan vi kontrollera att den verkligen blir noll. Nu får vi också att:

$$v_b = \frac{V_1 - kj\omega C v_a}{1 - kj\omega C} = \frac{1 - jj}{1 - j} = 1 + j \tag{19}$$

(Vi kan sätta in både v_a och v_b i den första nodanalysen och visa att den verkligen blir noll (att strömmarna verkligen summeras till noll i noden).)

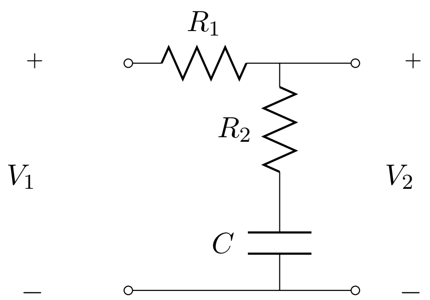
Vi kan nu få ut strömmen:

$$I_c = \frac{v_b - v_a}{1/(j\omega C)} = \frac{(1+j) - j}{-j} = j. \tag{20}$$

För att skriva detta på formen $i_c(t) = I_c \cos(\omega t - \beta)$ behöver vi veta amplituden och fasen. (Notera att vi har hela tiden här räknat med att fasen för V_1, är vald till noll, dvs. $\angle V_1 = \alpha = 0$ annars hade vi fått använda oss av $1e^{j\alpha}$.) Vi får:

$$i_c(t) = |I_c| \cos(\omega t + \angle I_c) = 1 \cos(\omega t + \pi/2) \tag{21}$$

Uppgift 3



(3a) Vi gör en spänningsdelning (alternativt nodanalys) och får att:

$$V_2 = V_1 \frac{R_2 + Z_C}{R_2 + Z_C + R_1} = V_1 \frac{R_2 + \frac{1}{j\omega C}}{(R_1 + R_2) + \frac{1}{j\omega C}} = V_1 \frac{1 + j\omega R_2 C}{1 + j\omega (R_1 + R_2) C} \rightarrow \tag{22}$$

$$H(\omega) = \frac{V_2}{V_1} = \frac{1 + \frac{j\omega}{\omega_1}}{1 + \frac{j\omega}{\omega_2}} \tag{23}$$

Vi kan nu identifiera de två brytfrekvenserna, där $\omega_1 = \frac{1}{R_2 C}$ är ett nollställe och $\omega_2 = \frac{1}{(R_1+R_2)C}$ är en pol. Nollställe ändrar $|H(\omega)|$ med $+20$ dB/dekad och en pol ändrar

$|H(\omega)|$ med -20 dB/dekad. Därtill så behöver vi veta värden då $\omega = 0$ samt $\omega \to \infty$. Vi ser från H att $\omega = 0$ ger att $H = 1$ (vilket är 0 dB). Vi kan skriva om H och får att:

$$H(\omega) = \frac{\frac{1}{j\omega} + R_2C}{\frac{1}{j\omega} + (R_1 + R_2)C} \to (\omega \to \infty) \to \frac{R_2}{R_1 + R_2} \tag{24}$$

Så med detta får vi en graf såsom (för att rita i Matlab har följande värden använts $R_1 = R_2 = 1[\Omega]$, $C = 0.001[F]$ vilket ger att $\omega_1 = 1000$ [rad/s], $\omega_2 = 500$ [rad/s] samt $\frac{R_2}{R_1+R_2} = 0.5 \approx -6$ dB, see ”Figure 1” och ”Figure 2” nedan):

(3b) *(Denna frågan är tänk att ge studenten en chans att ”lyfta sig över” vanliga frågor och applicera sin kunskapen på att analysera filtret i ett vidare perspektiv och utifrån detta komma fram till en egen slutsats. Detta är oftast det sista steget i en lärande process.)*

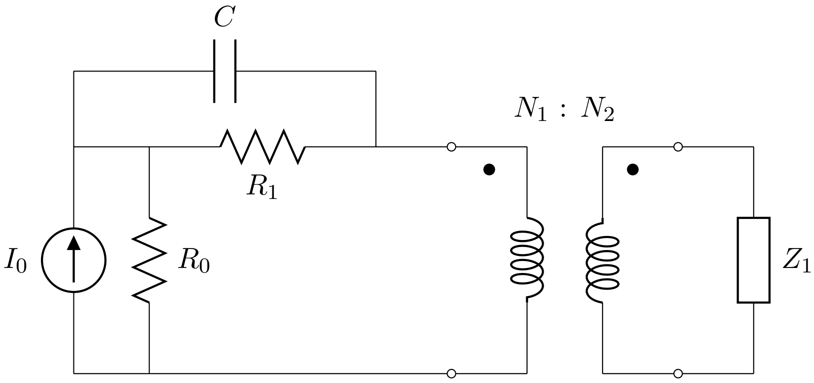
En nytta med filtret är att det kan fungera som ett enkelt ”frekvensuppdelningssystem” eftersom signaler ovanför ω_1 inte dämpas bort helt som i ett ”vanligt” lågpassfilter. Några fördelar med detta kan tänkas vara:

- Man kan väja R_1 och R_2 så att man kan studera vilken frekvens en störning ligger på (den dämpas inte bort helt) utan att den påverkar nyttosignaler för mycket.
- Man vill enkelt sortera två signaler från varandra, t.ex. en bärvåg och en signal. Signalen som oftast ligger högre i frekvens dämpas bara lite och man kan enkelt förstärka den sen.
- Utifrån en given och känd signal bestående av två frekvenser (på olika sidor om ”branten”) kan man studera värdet på en komponents resistans, dvs. Re$\{$Z$\}$, (dvs R_1 och/eller R_2) eftersom man vet vad amplituden för den högre frekvensen ska bli (från $\frac{R_2}{R_1+R_2}$).
- ...

Därtill passar det bra som tentatal. (?)

Uppgift 4

(I texten fanns en litet skrivfel och korrekt ska vara (som meddelades under skrivningen) $Z_1 = R \pm jX$ eftersom R_1 finns i kretsen redan som en komponent. Detta för att visa att man ska ange Z_1 i sin reella och imaginära del, dvs. på kartesisk form.)



Eftersom inga värden på någon resistans/impedans, k, L_1, L_2, M på transformatorn gavs kan man sluta sig till att den är ideell ($k = 1$ och $R = 0$) (därtill eftersom enbart N_1 och N_2 gavs).
Vi delar upp hela kretsen i två delar där högerdelen är transformatorn samt Z_1 och vänsterdelen är "den drivande kretsen". För att maximera den aktiva effekten som utvecklas i Z_1 behöver vi veta Z_{in} för högerdelen samt Z_{th} för vänsterdelen. **Notera** att eftersom transformatorn är ideell så utvecklas ingen aktiv effekt i den själv.

Thevenin ekvivalenten för kretsen till vänster sett in i den tas fram genom att nollställa I_0 (då inga beroende källor finns här) och blir $Z_{th} = R_0 + \frac{R_1 Z_C}{R_1 + Z_C} = R_0 + \frac{R_1}{1+j\omega R_1 C}$.
In-impedansen för högerdelen ges av (se t.ex. föreläsningsanteckningarna) $Z_{in} = \frac{1}{n^2} Z_1$ där $n = \frac{N_2}{N_1} \to Z_{in} = Z_1 \left(\frac{N_1}{N_2}\right)^2$.
För maximalt med aktiv effekt ska vi ha $Z_{in} = Z_{th}^*$ vilket ger att:

$$Z_{in} = Z_{th}^* \leftrightarrow Z_1 \left(\frac{N_1}{N_2}\right)^2 = \left(R_0 + \frac{R_1}{1 + j\omega R_1 C}\right)^* \Rightarrow \tag{25}$$

$$Z_1 = \left(\frac{N_2}{N_1}\right)^2 \left(R_0 + \frac{R_1(1 - j\omega R_1 C)}{1 + (\omega R_1 C)^2}\right)^* \Rightarrow \tag{26}$$

$$Z_1 = \left(\frac{N_2}{N_1}\right)^2 \left(R_0 + \frac{R_1}{1 + (\omega R_1 C)^2} - j\frac{\omega R_1^2 C}{1 + (\omega R_1 C)^2}\right)^* \Rightarrow \tag{27}$$

$$Z_1 = \left(\frac{N_2}{N_1}\right)^2 \left(R_0 + \frac{R_1}{1 + (\omega R_1 C)^2}\right) + j\left(\frac{N_2}{N_1}\right)^2 \left(\frac{\omega R_1^2 C}{1 + (\omega R_1 C)^2}\right) \tag{28}$$

Uppgift 5

c, b, d, a

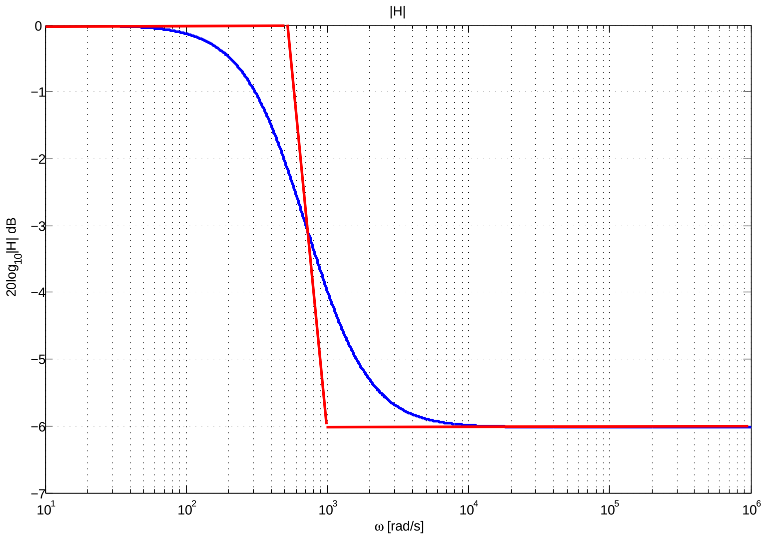


Figure 1: $|H|$ ritat med den approximativa metoden samt verkligt beteende ritat i Matlab.

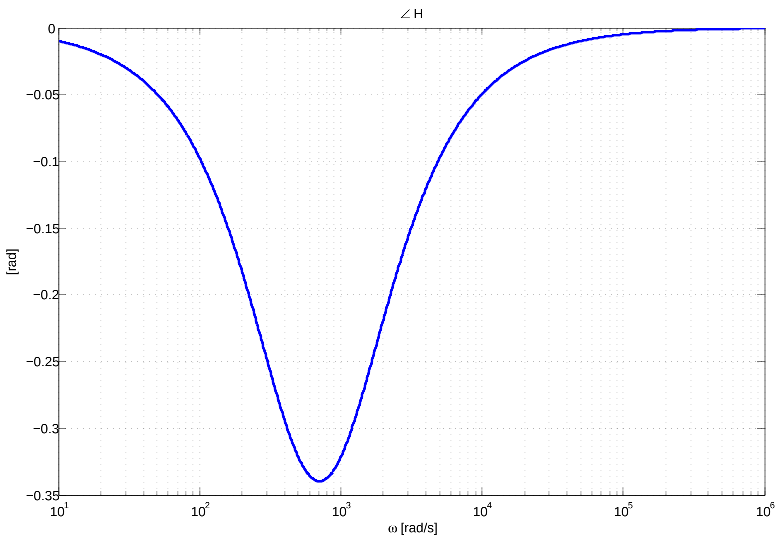


Figure 2: $\angle H$ också givet för skojs skull utan vidare förklaring.