KTH ei1110 Elkretsanalys (utökad kurs) CELTE, kontrollskrivning (KS1), 2018-09-18 kl. 08:00 - 10:00.

Hjälpmedel: Inga extra hjälpmedel är tillåtna.

Alla källor ska antas vara likströmskällor och beteckningar såsom V_0, I_1 etc. beskriver oftast amplituden hos dessa. Om ingen annan information ges ska komponenter antas vara ideala. Angivna värden hos komponenter (t.ex. R för ett motstånd, V för en spänningskälla etc.) ska antas vara kända storheter och andra markerade storheter (t.ex. strömmen genom, eller spänningen över, ett motstånd) ska antas vara okända storheter. Antag **stationärt tillstånd**, dvs. lång tid efter alla komponenter har kopplats ihop. Några viktiga saker för att kunna få maximalt antal poäng är:

- **Endast ett problem per sida** och text på baksidan kommer inte att beaktas.
- Tänk på att er handstil måste vara tydlig för att lösningen ska kunna bedömas. **Kan vi inte läsa, kan vi inte ge poäng!** Använd **inte rödpenna**.
- Lösningarna ska uttryckas i de kända storheterna och förenklas **innan** eventuella värden används. Därmed visas förståelse för problemet.
- **Ge alltid din krets** och var tydlig med diagram och definitioner av variabler. Tänk på hur du definierar polariteten och riktningen på de spänningar och strömmar du använder. **Använd passiv teckenkonvention**. Om det fattas figur med definierade variabler utsatta kan det bli **avdrag** vid tvetydighet.
- Därtill, dela tiden mellan talen och kontrollera svarens rimlighet genom t.ex. dimensionsanalys eller alternativ lösningsmetod.

Gränserna för bonuspoäng är: 50% (1 bp.), 60% (2 bp.), 70% (3 bp.), 80% (4 bp.). Ingen avrundning görs.

Examinator: Daniel Månsson (08 790 9044)

Lycka till och ta det lugnt!

Uppgift 1 [20 p.]

För kretsen nedan:

(a) [5 p.] Använd nodanalys och sätt upp ekvationssystemet (där termerna är samlade) för de angivna noderna a, b, c. Ekvationssystemet ska **endast** innehålla kända storheter samt nodpotentialerna.

För **(b) - (d)** tas den beroende strömkällan (dvs. "kv_x") bort och resistanserna har alla värdet $R = \frac{1}{5}$ [Ω], $I_1 = 5$ [A].

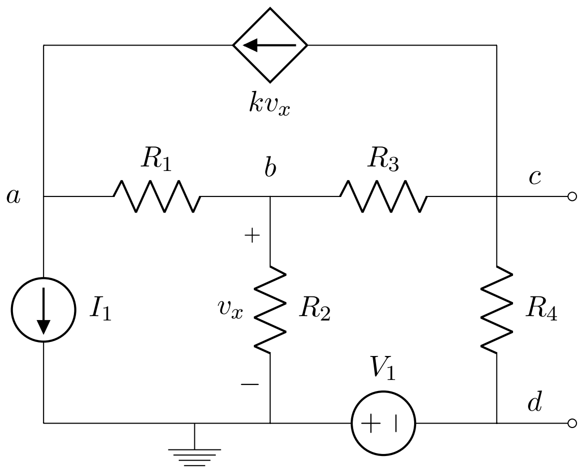
Observera att lösningarna bör först uttryckas i de kända storheterna och förenklas **innan** värdena används. Därmed visas förståelse för problemet.

Notera även att **(b)** eller **(c)** inte får lösas genom att ta fram R_{TH} och använda detta men det kan vara en kontroll av ditt resultat.

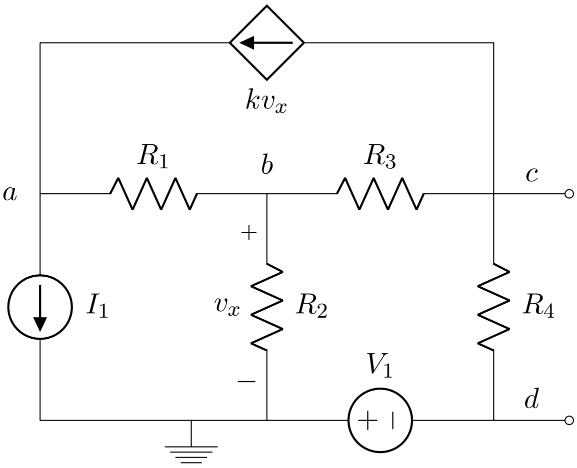
(b) [7 p.] Bestäm tomgångsspänningen, v_{oc}, vid "$c - d$".

(c) [5 p.] Bestäm kortslutningsströmmen, i_{sc}, vid "$c - d$".

(d) [3 p.] Bestäm theveninresistansen, R_{TH}, vid "$c - d$".



KTH ei1110 Elkretsanalys (utökad kurs) CELTE, kontrollskrivning (KS1), 2018-09-18 kl. 08:00 - 10:00 - **lösningsförslag**



(1a) Nodanalys (där vi som vanligt räknar strömmarna som går ut ur noden som positiv) i noder a, b, c ger oss:

$$KCL_a: \quad +I_1 + \frac{v_a - v_b}{R_1} - kv_x = 0 \tag{1}$$

$$KCL_b: \ \frac{v_b - v_a}{R_1} + \frac{v_b - 0}{R_2} + \frac{v_b - v_c}{R_3} = 0 \tag{2}$$

$$KCL_c: \ \frac{v_c - v_b}{R_3} + kv_x + \frac{v_c - v_d}{R_4} = 0 \tag{3}$$

$$\tag{4}$$

Därtill kan vi ta hjälp av:

$$KVL_1 : 0 - V_1 = v_d \tag{5}$$

$$KVL_2 : 0 + v_x = v_b \tag{6}$$

$$\tag{7}$$

Detta ger oss, efter vi samlat termerna (med källorna till höger för att förtydliga dem):

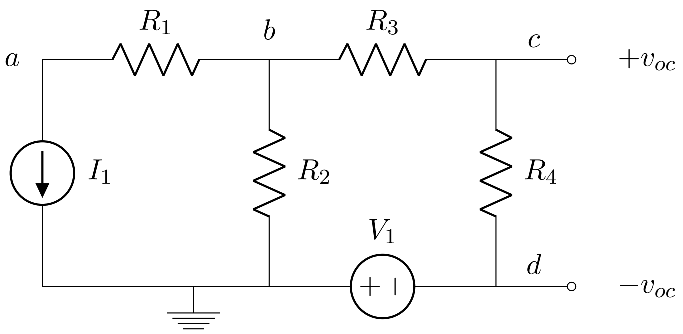
$$(a):\ v_a\frac{1}{R_1}-v_b\left(\frac{1}{R_1}+k\right)=-I_1 \tag{8}$$

$$(b):\ -v_a\frac{1}{R_1}+v_b\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_2}\right)-v_c\frac{1}{R_3}=0 \tag{9}$$

$$(c):\ -v_b\left(\frac{1}{R3}-k\right)+v_c\left(\frac{1}{R_3}+\frac{1}{R_4}\right)=-\frac{V_1}{R_4} \tag{10}$$

$$\tag{11}$$

(1b) Nu har vi tagit bort den beroende strömkällan och vi får kretsen nedan när vi nu ska ta fram tomgångsspänningen (dvs. Theveninspänningen). Alla resistanser har numeriska värdet $R=\frac{1}{5}$ samt att $I_1=5$.



Alternativ 1: Man kan lösa uppgiften på olika sätt vi börjar med nodanalays:

$$KCL_a:\ +I_1+\frac{v_a-v_b}{R_1}=0\rightarrow v_a=v_b-I_1R \tag{12}$$

$v_a=...$ använder vi nu i KCL_b som blir efter multiplikation med R:

$$KCL_b:\frac{v_b-v_a}{R_1}+\frac{v_b-0}{R_2}+\frac{v_b-v_c}{R_3}=0\rightarrow \tag{13}$$

$$3v_b-(v_b-I_1R)-v_c=0\rightarrow v_b=\frac{1}{2}(v_c-I_1R) \tag{14}$$

$v_b=...$ i KCL_c som blir efter multiplikation med R samt att $v_d=-V_1$:

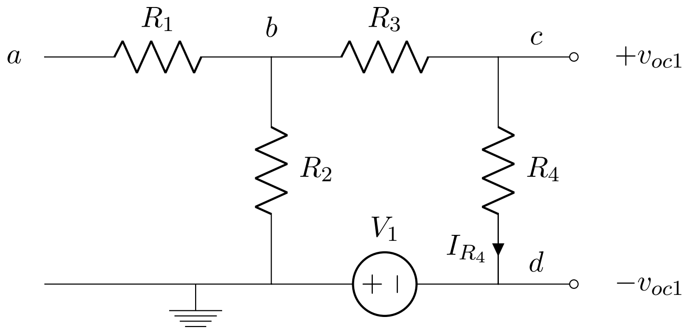
$$KCL_c:\ \frac{v_c-v_b}{R_3}+kv_x+\frac{v_c-v_d}{R_4}=0\rightarrow \tag{15}$$

$$2v_c-\frac{1}{2}(v_c-I_1R)+V_1=0\rightarrow v_c=\frac{1}{3}(-2V_1-1) \tag{16}$$

$$\rightarrow v_{oc}=v_c-v_d=\frac{1}{3}(-2V_1-1)-(-V_1)=\frac{1}{3}(V_1-1) \tag{17}$$

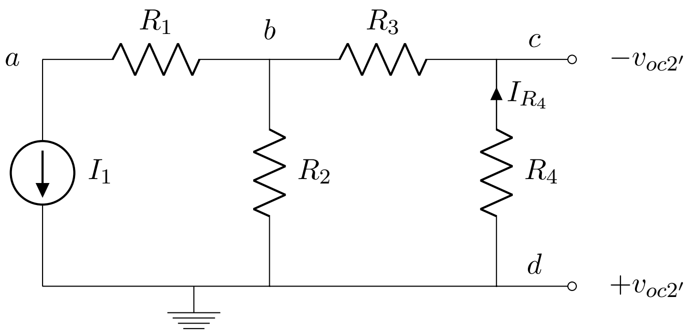
Alternativ 2: Vi kan även lösa uppgiften med superposition. Om vi nollställer I_1 så blir det ett avbrott här och ingen ström går igenom R_1. Spänningsfallet över R_4 blir då:

$$v_{oc1} = R_4 I_{R_4} = R_4 \frac{V_1}{R_2 + R_4 + R_4} = R \frac{V_1}{3R} = \frac{V_1}{3} \tag{18}$$



Sen nollställer vi V_1 och får då en korslutningen mellan nod d och jord. Sen ger oss, t.ex., med strömdelning, strömmen genom seriekopplingen $R_3 + R_4$ samt med i åtanke att R_1 inte påverkar strömmen i den grenen eftersom strömkällan sitter i serie med R_1 och bestämmer strömmen i den grenen:

$$I_{R_4} = I_1 \frac{R_2}{R_2 + R_3 + R_4} = I_1 \frac{R}{3R} = I_1 \frac{1}{3} \tag{19}$$



Men nu måste vi minnas att riktningen på I_{R_4} blir, enligt hur strömdelning definieras, i motsatt riktning mot I_1 vilket ger oss ett spänningsfall från d till c vilket är tvärtom det vi vill ha (om vi använder definitionen $v_{oc} = v_c - v_d$ och passiv teckenkonvention) så vi får byta tecken på svaret. Spänningen över R_4 blir nu:

$$v_{oc2} = -v_{oc2'} = -R_4 I_{R_4} = -R_4 I_1 \frac{1}{3} = -R I_1 \frac{1}{3} \tag{20}$$

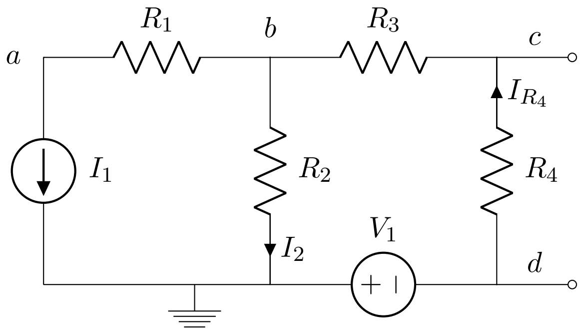
Totalt får vi med superposition:

$$v_{oc} = v_{oc1} + v_{oc2} = \frac{V_1}{3} - RI_1\frac{1}{3} \tag{21}$$

...och med siffervärdena i text...

$$v_{oc} = \frac{1}{3}(V_1 - 1) \tag{22}$$

Alternativ 3: Man kan även lösa uppgiften på följande sätt med en KVL runt högra delen av kretsen:



En KCL vid jord ger oss:

$$-I_1 - I_2 + I_{R_4} = 0 \rightarrow \tag{23}$$
$$I_2 = I_{R_4} - I_1 = 0 \tag{24}$$
$$\tag{25}$$

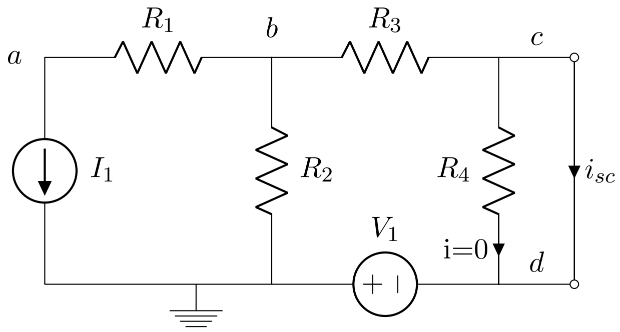
Med en KVL får vi:

$$+V_1 + R_2 I_2 + R_3 I_{R_4} + R_4 I_{R_4} = 0 \rightarrow \tag{26}$$
$$+V_1 + R_2(I_{R_4} - I_1) + R_3 I_{R_4} + R_4 I_{R_4} = 0 \rightarrow \tag{27}$$
$$-I_{R_4}(R_2 + R_3 + R_4) = V_1 - I_1 R_2 \rightarrow \tag{28}$$
$$I_{R_4} = -\frac{V_1 - I_1 R_2}{R_2 + R_3 + R_4} \tag{29}$$
$$\tag{30}$$

Liknande ovan så är nu vår I_{R_4} riktad fel jämfört med hur vi definierar v_{oc} så vi får ett extra "-" och med siffervärdena får vi:

$$v_{oc} = -I_{R_4}R_4 = R_4\frac{V_1 - I_1 R_2}{R_2 + R_3 + R_4} = R\frac{V_1 - I_1 R}{3R} = \frac{V_1 - 1}{3} \tag{31}$$

(...notera att om vi i får KCL i början riktat I_{R_4} åt andra hållet hade vi fått "$-I_1 - I_2 - I_{R_4} = 0$" och rätt tecken direkt! Ofta löner det sig att tänka efter hur man definierar spänningar och strömmar i relation till vad man söker...)



(1c) Vi kan lösa problemet med samma metoder som ovan men för att spara plats så använder nodanalys här (öva gärna de andra två och visa att de blir samma som nedan). Vi kortsluter noderna c och d och eftersom vi nu har ändrat nodpotentialerna (om man faktiskt skulle sätta in värdena) så får vi göra om våra beräknar men vi kan dock (**här**) använda några av uttrycken.

$$KCL_a : +I_1 + \frac{v_a - v_b}{R_1} = 0 \rightarrow \quad (32)$$

$$v_a = v_b - I_1 R \quad (33)$$

$v_a = ...$ använder vi nu i KCL_b och att nu har vi $v_c = v_d = -V_1$

$$KCL_b : \frac{v_b - v_a}{R_1} + \frac{v_b - 0}{R_2} + \frac{v_b - v_c}{R_3} = 0 \rightarrow \quad (34)$$

$$3v_b - (v_b - I_1 R) - (-V_1) = 0 \rightarrow v_b = \frac{1}{2}(-V_1 - I_1 R) \quad (35)$$

$v_b = ...$ i KCL_c som blir efter multiplikation med R samt att $v_c = -V_1$:

(notera att R_4 inte leder ström pga att det inte är ett spänningsfall över denna):

$$KCL_c : \frac{v_c - v_b}{R} + i_{sc} = 0 \rightarrow \quad (36)$$

$$-V_1 - \frac{1}{2}(-V_1 - I_1 R) + i_{sc} R = 0 \quad (37)$$

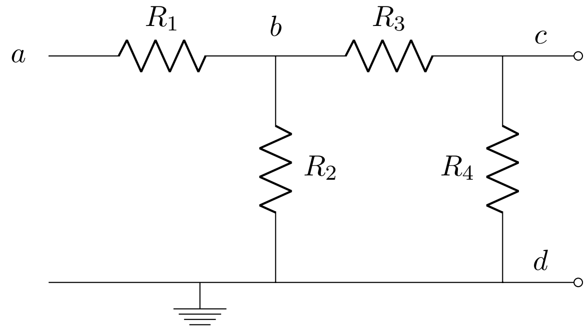
$$\rightarrow i_{sc} = \frac{1}{R}\left(\frac{1}{2}V_1 - \frac{I_1 R}{2}\right) = \frac{5}{2}(V_1 - 1) \quad (38)$$

(1d)

$$R_{TH} = v_{oc}/i_{sc} = \frac{\frac{1}{3}(V_1 - 1)}{\frac{5}{2}(V_1 - 1)} = \quad (39)$$

$$\frac{1}{3}(V_1 - 1)\frac{2}{5(V_1 - 1)} = 2/15 \quad (40)$$

Alternativt, eftersom vi bara har oberoende källor kan vi nollställa dessa varpå vi får:



R_1 längst till vänster påverkar inte pga att ingen strömmer flyter genom denna och resten av kretsen är (sett ifrån/in i porten $c - d$) $(R_2 + R3)$ parallellt med R_4 (alla har resistansen R):

$$R_{TH} = \frac{(R_2 + R_3)R_4}{R_2 + R_3 + R_4} = \frac{2R^2}{3R} = \frac{2}{3}R = 2/15 \tag{41}$$