KTH Alfvénlaboratoriet
Teoretisk Elektroteknik

Repetition i ellära

Henrik Otterheim

Innehåll

1. Inledning

Det här kompendiet riktar sig till dig som ska börja studera ellära på Kungliga Tekniska Högskolan, KTH. Kursen i ellära lägger grunden för och introducerar begrepp till den elektroteknik som används vid konstruktion av förstärkare, IC-kretsar, svängningskretsar, radio, TV, datorer, CD-spelare, elmotorer mm.

Modellbildning

Alla tekniska beräkningar och resonemang byggs upp kring olika modeller av verkligheten. Det är oftast matematiska modeller. Det gör att vi kan dra slutsatser samt göra bevis och tolkningar med hjälp av matematiska verktyg. Vi kan förklara fenomen och göra tekniska konstruktioner.

För att förenkla beräkningar inom fysiken görs ofta approximationer som ger ett litet men oftast acceptabelt fel i beräkningen. Approximationerna gör att beräkningarna blir mindre omfattande och problemen kan lösas för hand eller med enklare datorer. Inom elläran approximerar vi t.ex. oftast resistansen till 0 i de ledningar som kopplar ihop komponenterna. Det gör att vi inte behöver bry oss om hur långa ledningarna är eller hur de är dragna i kretsen när vi gör beräkningar. Det är inte helt sant men den förenklar vår behandling av den elektriska kretsen och felet är oftast acceptabelt.

Det går inte att försumma resistansen när vi gör beräkningar på mycket långa ledningar. När vi t.ex. räknar på överföringen av elenergi från vattenkraftverken i Norrland till elkonsumenterna i Stockholm måste vi ta med resistansen i ledningen. Approximationen att ledningsresistansen är 0 är alltså ofta acceptabel för mindre kretsar men helt felaktig för långa kraftledningar, även om de består av samma material.

Ett viktigt moment i din civilingenjörsutbildning är att sätta dig in i och försöka förstå och behärska de modeller och approximationer som görs och när de är giltiga. Du bör även öva upp din förmåga att göra beräkningar med dessa modeller.

Du kommer kanske tycka att kurserna på KTH verkar väldigt teoretiska och utan koppling till verkligheten. Det beror på att en förhållandevis stor del av tiden på högskolan avsätts för att studera och lära ut hur man utför beräkningar på de modeller som man har skapat. Att göra kopplingen till verkligheten, skapa den matematiska modellen, går relativt fort i en utbildning. Men att sätta sig in i modellen och förstå effekter och göra beräkningar är komplicerat och krävande. Det kräver mycket tid och god matematisk färdighet.

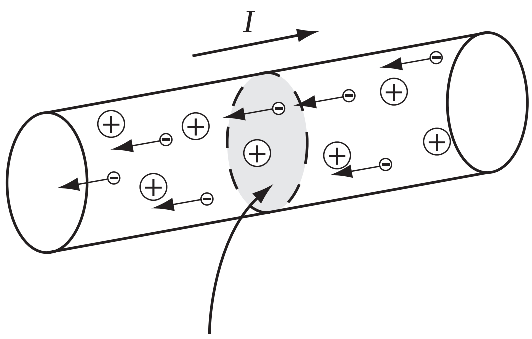
Gå tillbaka då och då under dina studier och repetera den modellbildning som har lett till de beräkningar och slutsatser som du håller på med just nu. Om du gör det kommer du öka chansen att få ett sammanhang i studierna och en bestående kunskap från dina studier på KTH. Du kommer också upptäcka att flera kurser använder likartade modeller.

Mål

Målet med detta studiehäfte är att du ska känna till och förstå begreppen spänning, ström och resistans. Du ska kunna Ohms lag, Kirchhoffs strömlag och spänningslag och kunna tillämpa dem i beräkningar. Du ska behärska seriekoppling och parallellkoppling av resistorer och utföra förenklingar av kretsar. Studiehäftet är en förberedelse till kursen i Ellära på KTH och ska vara instuderat innan kursen påbörjas.

2. Elektrisk ström

Elektrisk ström är ett begrepp som beskriver flödet av elektrisk laddning. "Det strömmade in elever i klassrummet." När vi säger så menar vi att det under en viss tid passerade ett antal elever genom dörren in till klassrummet. På samma sätt definierar vi elektrisk ström som laddningsmängd som under en tidsperiod passerar en yta.



Ström: laddningsmängd som passerar genom ytan per tid

I = laddning/tid [A]

I ledare är det elektronerna som är lättrörliga och står för laddningstransporten. Som du ser i figuren är strömmen definierad som positiv i den riktning som positiv laddning rör sig. Eftersom elektronerna är negativt laddade kommer I vara motsatt riktad elektronernas rörelse.

Ström betecknas I och har enheten Ampere [A], efter den franske fysikern och matematikern André Marie Ampere. Ampere gjorde under början av 1800-talet stora insatser inom elektromagnetismen och formulerade bl.a. sambandet mellan elektrisk ström och magnetfält.

Några vanliga värden på strömstyrka:

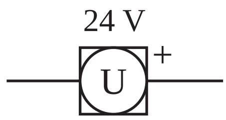
Talström i telefon	1 mA (=0,001 A)
60W-lampa	ca 0,3 A
Dammsugare	ca 5 A
Tunnelbanetåg	ca 1 kA (=1000 A)
Blixturladdning	ca 100 kA

3. Elektrisk spänning

Elektrisk spänning uppstår när elektrisk laddning separeras, dvs. det blir ett överskott på positiv laddning i ett område och ett underskott i ett annat. De separerade laddningarna påverkas av en återförande elektrisk kraft som vill neutralisera laddningsseparationen. Laddningsseparationen kan åstadkommas på olika sätt. I batteriet sker det på kemisk väg och i vattenkraftverken sker det genom en överföring från mekanisk rotation i magnetfält.

Elektrisk spänning har enheten Volt [V] efter den italienske fysikern Alessandro Volta som gjorde betydelsefulla insatser inom den tidiga elektrotekniken. Han konstruerade det första elektriska batteriet, Voltas stapel, år 1800 och införde begreppet spänning.

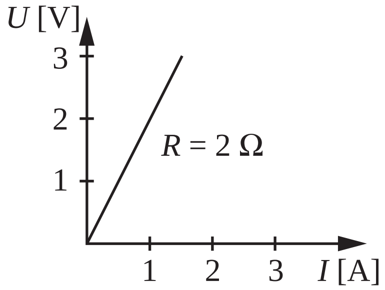
När vi ritar elektriska kopplingsscheman används den här symbolen för spänningskälla.



I symbolen anges pluspol och den spänning som källan ger mellan sina poler, i detta exempel 24 V.

4. Ohms lag

1826 upptäckte Georg Simon Ohm genom ett antal experiment att sambandet mellan ström I och spänning U i en ledare är linjärt.



Ohms lag: $U = R \cdot I$

Proportionalitetsfaktorn kallas för resistans och betecknas R. Resistansen är konstant under vissa förutsättningar som t.ex. konstant temperatur. Enheten för resistans är Ohm[Ω].

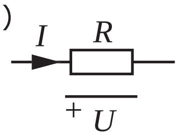
Ledarens resistans R är ett mått på hur väl den leder ström. Hög resistans innebär att de fria laddningarna möter stort hinder att röra sig i ledaren. Ledaren anses då vara dålig. Ett material som har så hög resistans att det inte flyter någon ström alls i samband med att man utsätter materialet för elektrisk spänning betecknas isolator.

I elektriska kretsar är komponenterna sammankopplade med ledningar. Dessa ledningar har så god ledningsförmåga att de anses vara ideala ledare, dvs. resistansen i ledningen är 0. Därmed är det inget spänningsfall längs en ledning, enligt Ohms lag, och det spelar därför ingen roll för kretsens funktion hur långa ledningarna är eller hur ledningarna är dragna i kretsschemat.

Ohms lag är inte allmängilltig utan gäller under vissa förutsättningar, precis som alla matematiska modeller av verkligheten.

Definitionsriktning

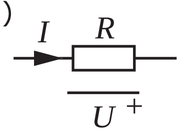
En resistor med resistansen R symboliseras av en rektangel enligt figuren. I figuren är resistorn anslutet till en ledning. I ledningen flyter strömmen I i pilens riktning. Beroende på hur ström och spänning är definierade kan vi få en teckenskillnad i Ohms lag. Om vi har definierat dem enligt figur a) ser Ohms lag ut a)



$$U = R \cdot I$$

Om definitionen däremot är enligt figur b) får vi ett minustecken i uttrycket

b)



$$U = -R \cdot I$$

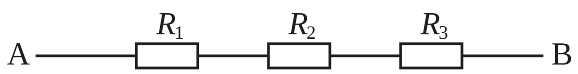
5. Seriekoppling av resistorer

Ohms lag ger sambandet mellan ström och spänning i resistorer. När vi har elektriska kretsar med flera resistorer inkopplade kan det vara svårt och omständligt att göra beräkningar. Många beräkningar upprepas i onödan vilket kan leda till fel. Kretsen blir både lättare att förstå och göra beräkningar på om vi kan göra förenklingar där vi utnyttjar Ohms lag.

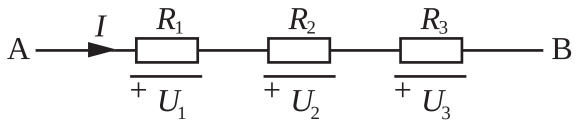
Ett fall där man kan införa en förenkling är när flera resistorer är inkopplade i serie efter varandra längs samma ledning. Detta kallas seriekoppling.

Exempel

Ett exempel på seriekoppling är den elektriska julljusstaken. De sju glödlamporna är oftast seriekopplade. I följande resonemang antar vi att det endast är 3 glödlampor i ljusstaken. Varje glödlampa representeras här av en resistor. Vi ska nu ta reda på vilken resistans hela ljusstaken har, dvs. vilken resistor de 3 seriekopplade resistorerna kan ersättas med.



I en seriekoppling flyter samma ström genom samtliga resistorer. Det är detta faktum som vi utnyttjar för att göra förenklingen. Vi inför strömmen I som går genom de tre resistorerna. Spänningarna över respektive resistor ges då av Ohms lag.



$$U_1 = R_1 \cdot I \qquad U_2 = R_2 \cdot I \qquad U_3 = R_3 \cdot I$$

Spänningen mellan A och B är summan av spänningarna över resistorerna,

$$U_{\mathrm{AB}} = U_1 + U_2 + U_3 .$$

Vi sätter in uttrycken för spänningarna över resistorerna,

$$U_{\mathrm{AB}} = R_1 \cdot I + R_2 \cdot I + R_3 \cdot I .$$

Därefter bryter vi ut den gemensamma faktorn, strömmen.

$$U_{\mathrm{AB}} = (R_1 + R_2 + R_3) \cdot I$$

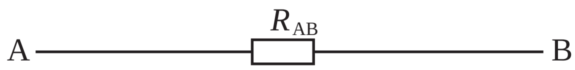
Ohms lag mellan A och B har formen

$$U_{\mathrm{AB}} = R_{\mathrm{AB}} \cdot I\,.$$

Jämförelse mellan de två senaste uttrycken ger att vi kan säga att resistansen mellan A och B är

$$R_{\mathrm{AB}} = R_1 + R_2 + R_3$$

Det här betyder att vi kan ersätta flera resistorer i serie med en enda resistor.



Ersättningsresistansen är lika med summan av de seriekopplade resistenserna. Ett allmänt uttryck för n stycken seriekopplade resistorer är

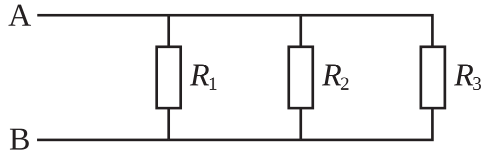
$$R_{\mathrm{AB}} = \sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{n}} R_{\mathrm{i}}$$

Övningsexempel

Att julljusstaken är seriekopplad kontrollerar du enkelt genom att skruva ur en av lamporna. Om samtliga lampor slocknar är ljusstaken seriekopplad. Varför det?

6. Parallellkoppling av resistorer

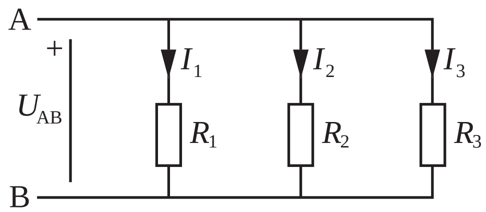
Ett annat fall där förenklingar kan införas i kretskopplingar är när resistorerna är inkopplade "bredvid" varandra. En sådan koppling kallas parallellkoppling. Vi tar ett exempel med 3 parallellkopplade resistorer.



För att bestämma ersättningsresistansen mellan A och B i det här fallet använder vi åter Ohms lag men utnyttjar den här gången att spänningen över de olika resistorerna är lika,

$$U_{AB} = U_1 = U_2 = U_3 .$$

Strömmen som flyter i respektive gren i parallellkopplingen ges av Ohms lag.



$$I_1 = \frac{U_{AB}}{R_1} \qquad I_2 = \frac{U_{AB}}{R_2} \qquad I_3 = \frac{U_{AB}}{R_3}$$

Totala strömmen som går mellan A och B är summan av de tre strömmarna.

$$I_{AB} = I_1 + I_2 + I_3$$

Vi sätter in uttrycken för strömmarna

$$I_{AB} = \frac{U_{AB}}{R_1} + \frac{U_{AB}}{R_2} + \frac{U_{AB}}{R_3}$$

Därefter bryter vi ut den gemensamma faktorn, spänningen.

$$I_{\mathrm{AB}} = \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} \right) \cdot U_{\mathrm{AB}}$$

Enligt Ohms lag är sambandet mellan ström och spänning mellan A och B

$$I_{\mathrm{AB}} = \frac{1}{R_{\mathrm{AB}}} \cdot U_{\mathrm{AB}}$$

De två senaste ekvationerna ger sambandet mellan ersättnings-resistansen och de parallellkopplade resistenserna

$$\frac{1}{R_{\mathrm{AB}}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}$$

Den inverterade ersättningsresistansen är lika med summan av de inverterade parallellkopplade resistenserna. Ett allmänt uttryck för n stycken parallellkopplade resistorer är

$$\frac{1}{R_{\mathrm{AB}}} = \sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{n}} \frac{1}{R_{\mathrm{i}}}$$

Vid specialfallet två parallellkopplade resistorer kan vi göra gemensam nämnare

$$\frac{1}{R_{\mathrm{AB}}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = \frac{R_2}{R_1 R_2} + \frac{R_1}{R_1 R_2} = \frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2}$$

Ersättningsresistansen får vi genom att invertera båda led

$$R_{\mathrm{AB}} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$$

Exempel

Låt oss anta att glödlamporna i den elektriska julljusstaken är parallellkopplade. Om man skruvar ur en av glödlamporna kan de övriga fortsätta att lysa. Det beror på att den urskruvade glödlampan endast bryter strömmen i sin egen gren i kopplingen. Strömmen kan fortsätta att flyta i de övriga parallella grenarna.

Övningsexempel

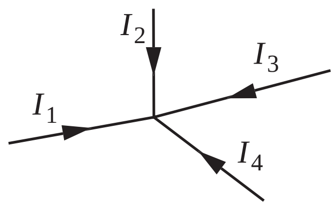
Blir strömmen starkare, svagare eller oförändrad genom de övriga glödlamporna när en av lamporna skruvas ur den parallellkopplade ljusstaken?

I det seriekopplade fallet, se avsnitt 3, orsakar den urskruvade glödlampan ett avbrott på ledningen som gör att strömmen inte kan flyta genom de övriga lamporna. Därför slocknar alla lamporna när en av dem skruvas ur.

7. Kirchhoffs strömlag

Gustav Robert Kirchhoff var en betydelsefull tysk fysiker under 1800-talet som har gjort insatser inom flera av fysikens områden. Han formulerade bl.a. Kirchhoffs lagar för beräkning av strömmar i elektriska ledningsnät. En av dessa lagar är Kirchhoffs strömlag. Den säger att summan av alla strömmar in till en nod, knutpunkt, i ett elektriskt nät, är lika med noll.

Kirchhoffs strömlag innebär att det inte kan skapas eller försvinna laddning i knutpunkten. All laddning som kommer in till noden via en eller flera ledningar måste fortsätta ut i någon eller några av de andra ledningarna.



$$I_1 + I_2 + I_3 + I_4 = 0$$

Vi har använt Kirchhoffs strömlag vid förenklingsberäkningen för parallellkopplade resistorer, avsnitt 6. Där säger vi att totala strömmen mellan A och B är lika med summan av grenströmmarna,

$$I_{\mathrm{AB}} = I_1 + I_2 + I_3 \ .$$

8. Potential

Potential är ett begrepp som är knutet till arbete och energi. De flesta av oss är vana vid begreppet potentiell energi eller med ett annat ord lägesenergi.

Tyngdkraft

Med lägesenergi brukar vi mena energin som vi får när vi rör oss i det jordbundna tyngdkraftfältet. Tyngdkraften är riktad vinkelrätt mot jordens yta. Vi ritar ut höjdkurvor som binder samman punkter med lika potential (samma höjd i tyngdkraftfältet) för att vi ska få en uppfattning om hur terrängen ser ut. Det är intressant därför att det åtgår arbete att röra sig uppåt eller neråt i kraftfältet. Vi vet att det är arbetsamt att cykla uppför en brant backe medan det är vilsamt och återhämtande att cykla nerför densamma. När vi cyklar uppför backen flyttar vi oss i tyngdkraftfältet så att potentialen ökar, medan potentialen minskar när vi åker nerför.

Potentialen är relativ, dvs. dess värde beror på vilken referenspunkt vi väljer att jämföra med. Vanligtvis väljer vi havsytan som referensnivå för tyngdkraftfältet. Vi talar om höjd över havet i angivelser på våra kartor.

Elektrisk kraft

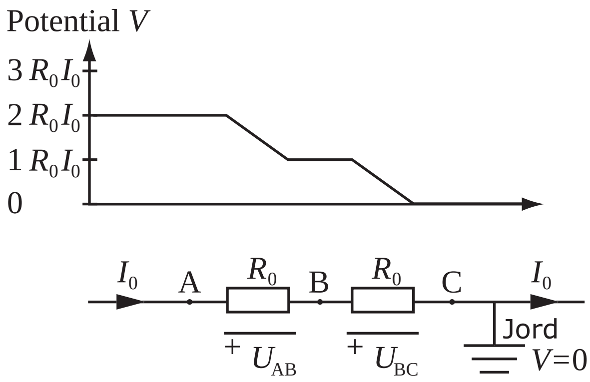
Inom elläran har vi ett liknande kraftfält, nämligen det elektriska kraftfältet. Man har därför definierat en potential även här som är analog med potentialen för tyngdkraftfältet. Skillnaden är att i tyngdkraftfältet är det ett objekts massa som påverkar kraftverkan medan i det elektriska fältet är det objektets elektriska laddning som ger kraftverkan. Den elektriska potentialen betecknas V.

Vi har normalt sett inte lika stor erfarenhet av att påverkas av elektriska kraftfält som av tyngdkraftfältet. Det gör att vi vanligen har svårare att ta till oss begreppen inom elläran än inom mekaniken. Visserligen rör vi oss för det mesta i starka elektriska fält men den totala påverkan på våra kroppar är ringa eftersom vi är helt laddningsneutrala. Vi består av lika mycket positiv som negativ laddning. Om vi däremot ser på laddningarna inuti material och kroppar så påverkas de hela tiden av starka elektriska krafter. En positiv laddning påverkas av en kraft som vill drar den från hög potential mot lägre potential. Det är precis så som vi påverkas av tyngdkraften, där vi dras från hög höjd mot lägre höjd över jordytan.

Den elektriska potentialen är också relativ och definieras på samma sätt som för tyngdkraften utifrån en referensnivå som kallas jordpunkt. Vid jordpunkten är potentialen definierad till värdet 0.

Exempel

Låt oss ta den elektriska julljusstaken som exempel för att förtydliga hur potentialen varierar i en elektrisk krets. Glödlamporna har vardera resistansen R_0. I vårt exempel har vi 2 glödlampor. Genom glödlamporna flyter strömmen I_0. Längst till höger är kretsen jordad. Vad är potentialen i kopplingen?



Låt oss börja från referenspunkten, dvs. jordpunkten. Där är potentialen definitionsmässigt satt till 0. Spänningen U mellan två punkter är detsamma som skillnaden i potential mellan punkterna. Enligt Ohms lag är spänningen över den högra resistorn

$$U_{BC} = R_0 I_0 .$$

Det betyder att potentialen på ledningen i punkten B mellan de två resistorerna måste var lika med potentialen vid jordpunkten, punkten C, plus spänningen över den högra resistorn.

$$V_B = V_C + U_{BC}$$

Vi uttrycker spänningen med Ohms lag

$$V_B = 0 + R_0 I_0$$

Längs ledningen är potentialen konstant eftersom ledningens resistans är försumbar i förhållande till andra resistanser i kretsen. Den är i stort sett lika med 0. I potentialgrafen ovanför kopplingen är potentialen inritad som funktion av läget längs kopplingen.

Nu återstår att ta reda på hur potentialen förändras i anslutning till den vänstra resistorn. Vi vet att potentialen är

$$V_B = R_0 I_0$$

till höger om resistorn. Enligt Ohms lag är spänningen över den vänstra resistorn

$$U_{AB} = R_0 I_0 .$$

Eftersom spänning är potentialskillnad får vi potentialen till vänster om resistorn om vi adderar U_{AB} till V_{B}.

$$V_{\mathrm{A}} = V_{\mathrm{B}} + U_{\mathrm{AB}} = R_0 I_0 + R_0 I_0 = 2R_0 I_0$$

I potentialgrafen kan vi se att potentialen stiger vid varje resistor om man går mot strömmens riktning. Följer man med strömmen sjunker potentialen vid resistorerna. I ledningen är potentialen konstant.

Spänningen över hela ljusstaken är summan av spänningarna över respektive glödlampa. I vårt fall är det endast två lampor

$$U_{\mathrm{AC}} = U_{\mathrm{AB}} + U_{\mathrm{BC}}$$

Sätter vi in Ohms lag får vi spänningen

$$U_{\mathrm{AC}} = R_0 I_0 + R_0 I_0 = 2R_0 I_0$$

Eftersom spänning är detsamma som potentialskillnad kan vi även uttrycka spänningen mellan A och C som

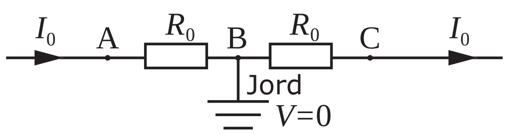
$$U_{\mathrm{AC}} = V_{\mathrm{A}} - V_{\mathrm{C}}$$

Sätter vi in det beräknade uttrycket för potentialen får vi spänningen

$$U_{\mathrm{AC}} = 2R_0 I_0 - 0 = 2R_0 I_0$$

Övningsexempel

Gör samma beräkningar som ovan för kretsen när jordpunkten har flyttats från C till B.



- Rita potentialgrafen för den här kopplingen? (Tänk på att potentialen kan vara negativ)
- Bestäm spänningen mellan A och C på de två olika sätt som beskrivits ovan.

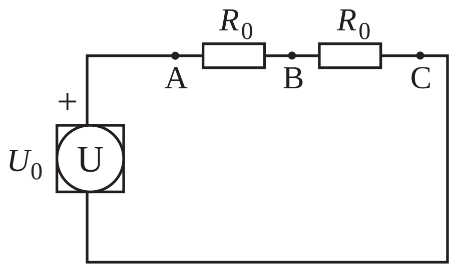
9. Kirchhoffs spänningslag

Kirchhoffs spänningslag säger att:

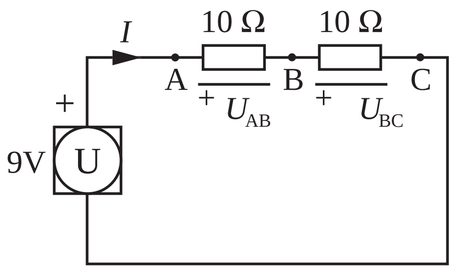
I en sluten strömkrets är summan av alla spänningar räknade med sitt tecken lika med noll.

Exempel

Låt oss fortsätta med den elektriska julljusstaken som exempel. Vi ansluter ljustaken till ett batteri som ger spänningen U_0. Vi antar att ljusstaken endast har 2 glödlampor med vardera resistansen R_0.



För att det ska bli tydligare vad som är kända storheter och vilka som är antagna räknestorheter sätter vi värdet $9\mathrm{V}$ på batterispänningen och resistansen $10\ \Omega$ på glödlamporna.



Vi har även antagit strömmen och övriga spänningar i kretsen. Riktning och polaritet på dessa är ansatser som används i beräkningen.

Potentialresonemang

I kapitel 6 gick vi igenom hur man beräknar potentialen i en krets. Man utgår från en punkt. För att få potentialen i en annan punkt lägger man till potentialskillnaden dvs. spänningen mellan den sökta punkten och utgångspunkten. Det är precis det som vi gör i Kirchhoffs spänningslag.

Vi utgår från punkten A, adderar spänningen över glödlampan och kommer till punkt B. Vi räknar alltså ut potentialen i B relativt potentialen i A. När vi så kommer tillbaka till punkten A efter att ha summerat alla potentialförändringar, spänningar, ska vi åter ha samma potential som vi startade på.

Om vi jämför med tyngdkraften så kan en liknande situation vara följande. Du står vid starten till motionsslingan i skogen. Låt oss kalla det för punkt A. Här är höjden 90 m över havet. Du befinner dig alltså på en viss potential i tyngdkraftfältet. När du har startat kommer du till två backar som vardera sänker din höjd över havet med 6 meter. Efter dessa backar är du alltså nere på 88 meter över havet. Mellan backarna är marken helt jämn. I slutspurten ligger en uppförsbacke som gör att du kommer upp 12 meter så att du åter är på samma höjd när du kommer tillbaka till starten, punkt A. Det känns ju ganska självklart att man är tillbaka på samma höjd, potential, efter en sådan här slinga. Lika självklart är det faktiskt att den elektriska potentialen är densamma efter ett varv i den elektriska slingan.

Beräkning

Vi börjar i punkten A. Låt potentialen vara V_{A}.

Nästa steg är att beräkna potentialen i punkten B. För att få potentialen i punkten B använder vi sambandet

$$U_{\mathrm{AB}} = V_{\mathrm{A}} - V_{\mathrm{B}}$$

Omflyttning ger

$$V_{\mathrm{B}} = V_{\mathrm{A}} - U_{\mathrm{AB}}$$

Vi konstaterar att potentialen sjunker från A till B eftersom vi går i strömmens riktning.

För att beräkna potentialen i C gör vi på samma sätt, utgår från potentialen i punkten B och lägger till spänningsfallet över resistorn.

$$V_{\mathrm{C}} = V_{\mathrm{B}} - U_{\mathrm{BC}}$$

Om vi sätter in uttrycket för V_{B} får vi

$$V_{\mathrm{C}} = V_{\mathrm{A}} - U_{\mathrm{AB}} - U_{\mathrm{BC}}$$

Nu återstår att ta sista steget från C till A. Här får vi ett positivt bidrag till potentialen eftersom

$$V_{\mathrm{A}} - V_{\mathrm{C}} = 9$$

Omstrukturering ger

$$V_{\mathrm{A}} = V_{\mathrm{C}} + 9$$

Vi sätter in uttrycket för V_C som vi har beräknat ovan och får ekvationen

$$V_A = V_A - U_{AB} - U_{BC} + 9$$

Omskrivning ger att summan av alla spänningar räknade med tecken i den slutna slingan är lika med noll.

$$0 = -U_{AB} - U_{BC} + 9$$

Om vi omstrukturerar ekvationen ytterligare en gång får vi ett bekant samband. Summan av spänningarna över respektive glödlampa är lika med totala spänningen över ljusstaken, dvs. batterispänningen.

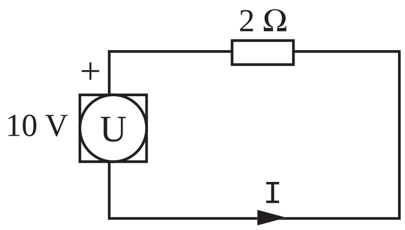
$$9 = U_{AB} + U_{BC}$$

Övningsexempel

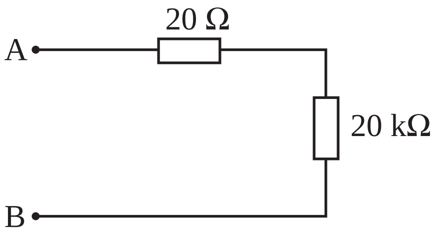
Beräkna strömmen i ljusstaken genom att använda Ohms lag för spänningen över respektive glödlampa.

10. Räkneuppgifter

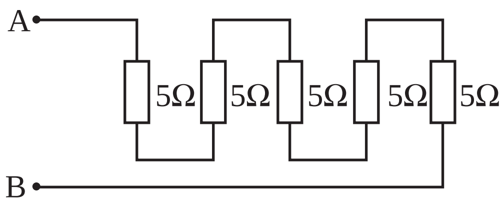
Uppg. 1 Bestäm strömmen I.



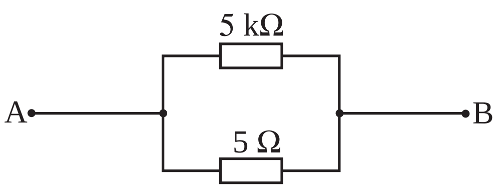
Uppg. 2 Beräkna resistansen mellan A och B.



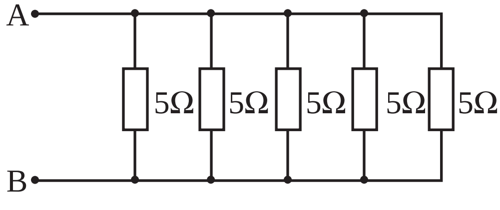
Uppg. 3 Beräkna resistansen mellan A och B.



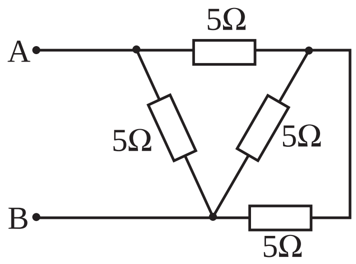
Uppg. 4 Beräkna resistansen mellan A och B.



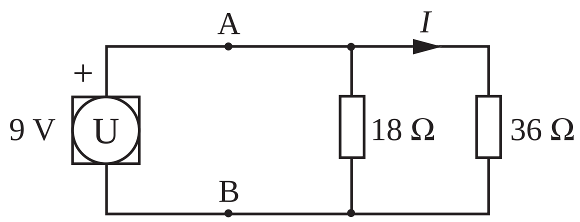
Uppg. 5 Beräkna resistansen mellan A och B.



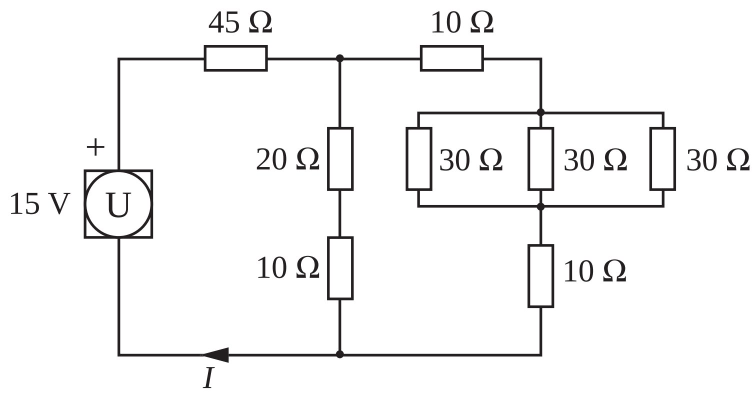
Uppg. 6 Beräkna resistansen mellan A och B.



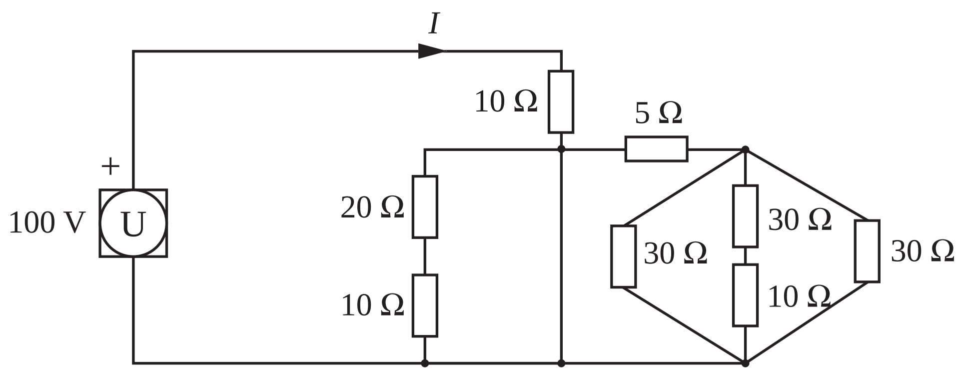
Uppg. 7 Beräkna strömmen I.



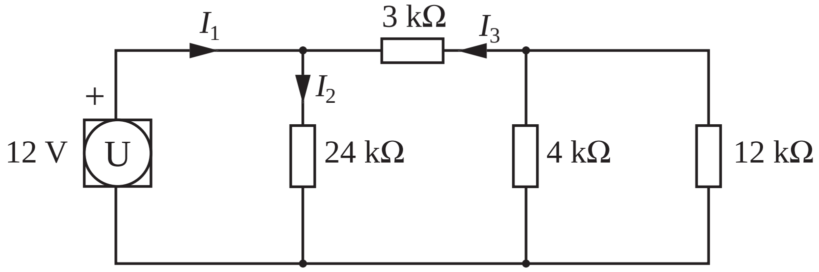
Uppg. 8 Beräkna strömmen I.



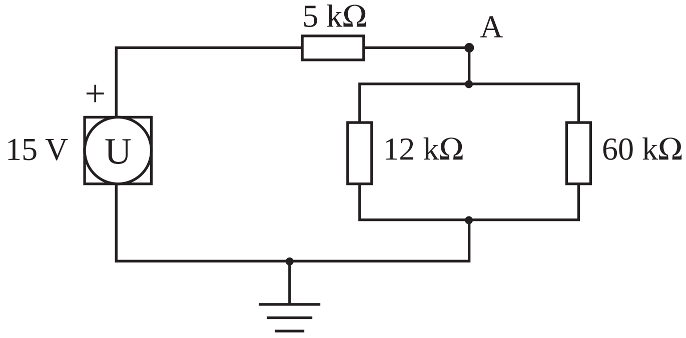
Uppg. 9 Beräkna strömmen I.



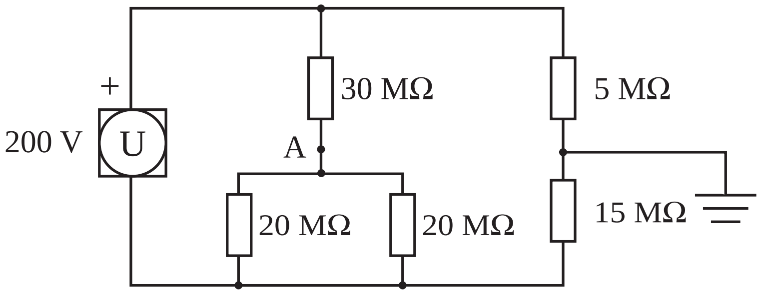
Uppg. 10 a) Beräkna strömmarna I_2 och I_3.
b) Använd Kirchhoffs strömlag för att bestämma I_1.



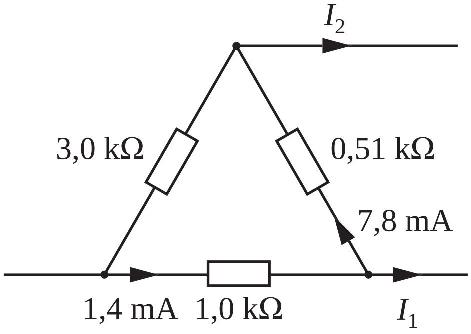
Uppg. 11 a) Använd Kirchhoffs spänningslag för att beräkna strömmen i kretsen.
b) Beräkna potentialen i punkten A.



Uppg. 12 Uppgiften går ut på att beräkna potentialen i punkten A.
a) Använd Kirchhoffs spänningslag för att beräkna relevanta strömmar i kretsen.
b) Beräkna potentialen i punkten A.



Uppg. 13 Använd Kirchhoffs ström- och spänningslagar för att beräkna strömmarna I_1 och I_2.



11. Lösningar till räkneuppgifter

Lösn. 1 Strömmen är ansatt åt motsatt håll mot definitionen i Ohms lag. Det innebär att vi får ett minustecken i Ohms lag, $U = -R \cdot I$, vilket ger

$$I = -\frac{U}{R} = -\frac{10}{2} = \text{-5A}$$

Svar: I = -5 A

Lösn. 2 Resistorerna är seriekopplade vilket ger $R_{\text{AB}} = 20 + 20 \cdot 10^3 = 20{,}02\ \text{k}\Omega$

Kommentar: Vi ser att i en seriekoppling där resistorernas resistans skiljer sig mycket åt, ger den större resistorn det dominerande bidraget till den totala resistansen. Du kan jämföra detta med det kända uttrycket; "ingen kedja är starkare än sin svagaste länk".

Svar: $R_{\text{AB}} = 20{,}02\ \text{k}\Omega \approx 20\ \text{k}\Omega$

Lösn. 3 Resistorerna är seriekopplade. Resistansen mellan A och B är summan av resistorernas resistans.

Svar: $R_{\text{AB}} = 5 \cdot 5 = 25\ \Omega$

Lösn. 4 Resistorerna är parallellkopplade. Eftersom det är två resistorer får vi

$$R_{\text{AB}} = \frac{5 \cdot 5 \cdot 10^3}{\left(5 + 5 \cdot 10^3\right)} = 4{,}995\ \Omega$$

Kommentar: Vi ser att i en parallellkoppling där resistorernas resistans skiljer sig mycket åt, ger den mindre resistorn det dominerande bidraget till den totala resistansen.

Svar: $R_{\text{AB}} = 4{,}995\ \Omega \approx 5\ \Omega$

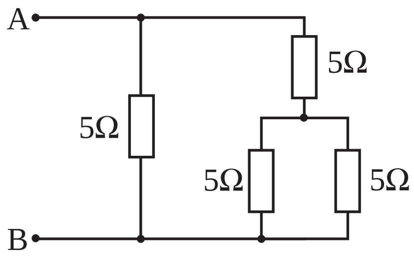
Lösn. 5 Resistorerna är parallellkopplade. Vi får inversen av resistansen mellan A och B som

$$\frac{1}{R_{\text{AB}}} = \frac{1}{5} + \frac{1}{5} + \frac{1}{5} + \frac{1}{5} + \frac{1}{5} = 1\,\text{S}$$

Kommentar: Vi ser att resistansen blir mindre ju fler resistorer som parallellkopplas. Det beror på att strömmen har fler grenar att fördela sig på, och därmed sjunker resistansen. För att få en känsla för detta kan man jämföra olika vägars framkomlighet. På en 4-filig motorväg möter trafiken mindre "motstånd" än på en vanlig 2-filig landsväg.

Svar: $R_{\text{AB}} = 1\,\Omega$

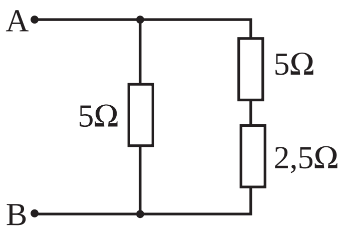
Lösn. 6 Kretsen kan ritas om enligt



De två parallellkopplade resistorerna kan ersättas med en resistor

$$R_1 = \frac{5 \cdot 5}{5+5} = 2{,}5\ \Omega.$$

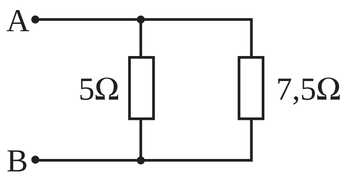
När vi har satt in ersättningsresistorn ser kretsen ut enl.



Nästa steg i förenklingen av kretsen är att ersätta de två seriekopplade resistorerna med

$$R_2 = 5 + 2{,}5 = 7{,}5\ \Omega.$$

Kretsen ser nu ut enl.



De två resistorerna är parallellkopplade. Resistansen mellan A och B ges därför av

$$R_{\mathrm{AB}} = \frac{5 \cdot 7{,}5}{5+7{,}5} = 3\ \Omega$$

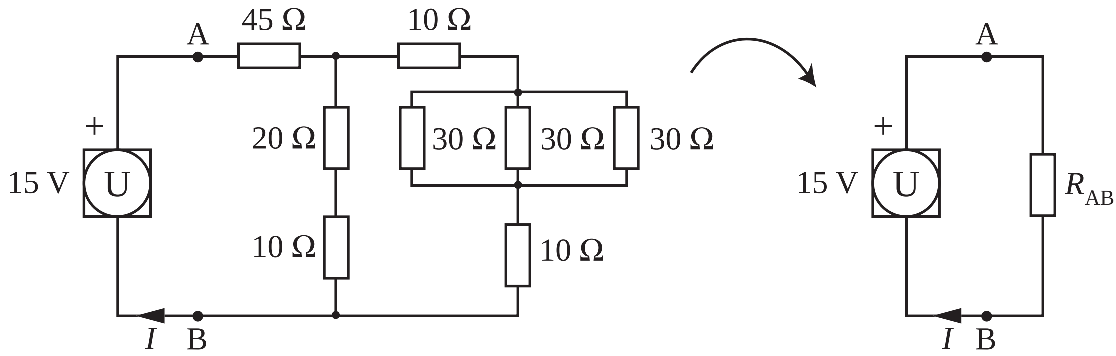
Svar: $R_{\mathrm{AB}} = 3\ \Omega$

Lösn. 7 De två resistorerna är parallellkopplade. Det betyder att det är samma spänning, U_{AB}, över respektive resistor. U_{AB} ges av spänningskällan, $U_{\mathrm{AB}} = 9\ \mathrm{V}$. Eftersom vi både känner resistans och spänning ges strömmen av Ohms lag

$$I = \frac{U_{\mathrm{AB}}}{R} = \frac{9}{36} = 0{,}25\ \mathrm{A}$$

Svar: $I = 0{,}25\ \mathrm{A}$

Lösn. 8

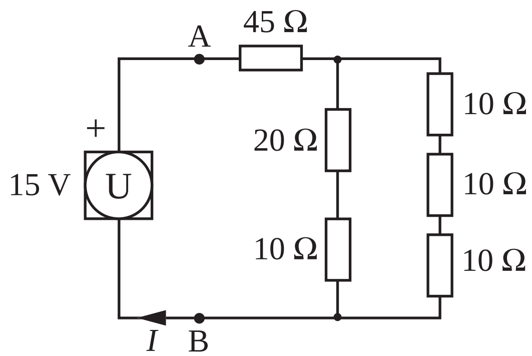


Strömmen ges av Ohms lag om vi känner resistansen mellan A och B, R_{AB}.

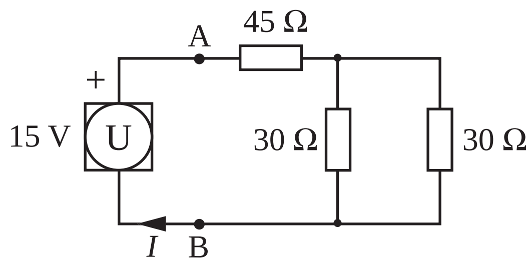
Vi börjar med att beräkna resistansen för de tre parallellkopplade 30Ω-resistorerna,

$\frac{1}{R_1} = \frac{1}{30} + \frac{1}{30} + \frac{1}{30} = \frac{1}{10}\,\mathrm{S}$. Ersättningsresistansen är alltså $R_1 = 10\,\Omega$.

Vi har nu en krets enl.



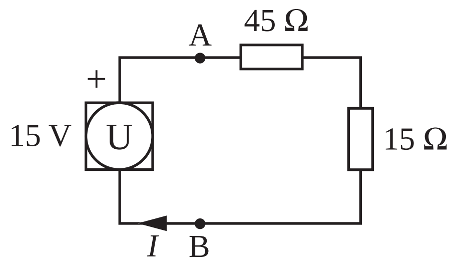
Resistorerna i respektive gren är seriekopplade. Vi kan ersätta dessa med summan av resistansen i respektive gren. Kretsen blir då förenklad till



Nu kan vi ersätta de två parallella resistorerna med en resistor som har resistansen,

$$R_2 = \frac{30 \cdot 30}{30 + 30} = 15\,\Omega$$

Nu har vi kommit fram till en krets med två seriekopplade resistorer,

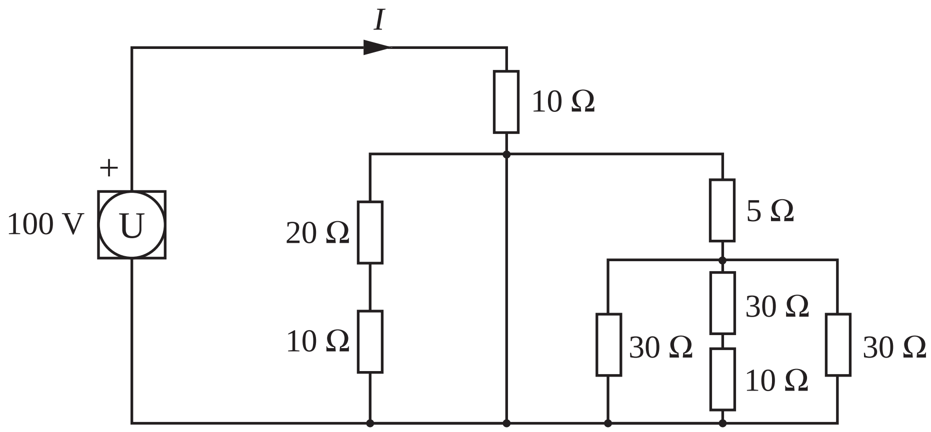


Resistansen mellan A och B är $R_{\mathrm{AB}} = 45 + 15 = 60\ \Omega$.

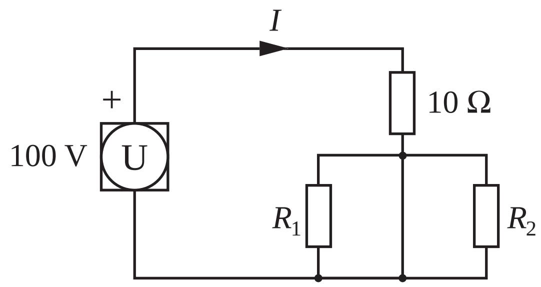
Enligt Ohms lag är strömmen $I = \dfrac{U_{\mathrm{AB}}}{R_{\mathrm{AB}}} = \dfrac{15}{60} = 0{,}25\ \mathrm{A}$.

Svar: $I = 250\ \mathrm{mA}$

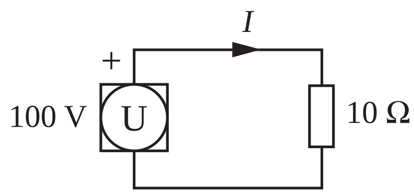
Lösn. 9



Vi ser att resistorerna i de tre parallella grenarna kan förenklas till



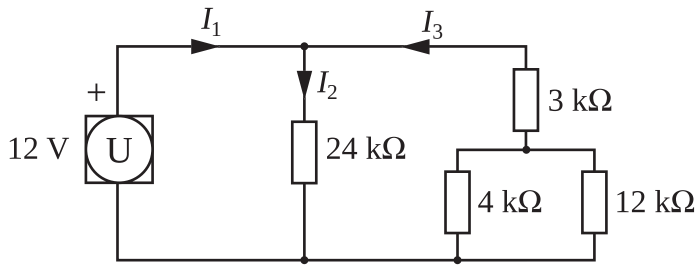
Eftersom den mittersta grenen har resistansen 0 Ω kommer all ström att gå i den grenen. R1 och R2 kommer inte att genomflytas av någon ström. De påverkar alltså inte kretsen och kan därmed tas bort. Vi får kvar en krets med endast en resistor.



Strömmen ges av Ohms lag, $I = \dfrac{U}{R} = \dfrac{100}{10} = 10\ \mathrm{A}$

Svar: $I = 10\ \mathrm{A}$

Lösn. 10



I_2 ges av Ohms lag, $I_2 = \dfrac{U}{R} = \dfrac{12}{24 \cdot 10^3} = 0{,}5 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{A}$.

I_3 flyter genom två parallellkopplade resistorer i serie med en 3 kΩ-resistor. De två parallellkopplade resistorerna kan ersättas av en resistor med resistansen

$$R_{3\mathrm{p}} = \frac{4 \cdot 12}{4 + 12} \cdot 10^3 = 3\ \mathrm{k\Omega}$$

Totala resistansen i gren 3 är summan av de två seriekopplade resistorernas resistans

$$R_3 = 3 \cdot 10^3 + R_{3\mathrm{p}} = (3 + 3) \cdot 10^3 = 6\ \mathrm{k\Omega}$$

I_3 ges av Ohms lag, $I_3 = \dfrac{U_3}{R_3} = -\dfrac{12}{6 \cdot 10^3} = -2 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{A}$.

Kommentar: Minustecknet kommer av att I_3 är definierad motsatt strömmens verkliga riktning. Se kapitel 4 om definitionsriktning. Det är alltså inte fel att ansätta en "felaktig" riktning på strömmen från början. Det visar sig i resultatet som i så fall ger en negativ ström.

Svar a): $I_2 = 0{,}5\ \mathrm{mA}$ och $I_3 = -2\ \mathrm{mA}$

Kirchhoffs strömlag, summan av alla strömmar in till en nod är lika med noll, i den övre noden ger,

$$I_1 + (-I_2) + I_3 = 0.$$

Omskrivning ger

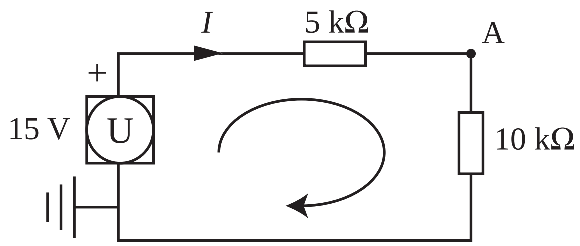
$$I_1 = I_2 - I_3 = (0{,}5 - (-2)) \cdot 10^{-3} = 2{,}5\ \mathrm{mA}$$

Svar b): $I_1 = 2{,}5\ \mathrm{mA}$

Lösn. 11 Vi börjar med att ersätta de två parallella resistorerna med en resistor,

$$R_p = \frac{12 \cdot 60}{12 + 60} \cdot 10^3 = 10 \text{ k}\Omega$$

Kretsen ser nu ut enligt nedan där vi även definierar strömmen I.



Kirchhoffs spänninglag säger att summan av spänningarna i en sluten slinga är lika med noll.

Vi börjar vid jordpunkten och går runt slingan medsols enligt skissen ovan.

$$15 - 5 \cdot 10^3 \cdot I - 10 \cdot 10^3 \cdot I = 0$$

När vi går från jordpunkten genom spänningskällan ökar potentialen och vi får ett positivt bidrag, den första termen i summan.

När vi går igenom en resistor i strömmens riktning sjunker potentialen och vi får därför negativt bidrag till summan.

Omskrivning av ekvationen ger strömmen:

$$I = \frac{15}{5 \cdot 10^3 + 10 \cdot 10^3} = 1 \cdot 10^{-3} \text{ A}$$

Svar a): Strömmen i slingan är $I = 1\,\text{mA}$.

För att bestämma potentialen i A utgår vi från jordpunkten där potentialen är definierad till 0 V. Potentialskillnaden mellan A och jord är spänningen över $10\text{ k}\Omega$-resistorn.

$$V_A - V_{jord} = 10 \cdot 10^3 \cdot I$$

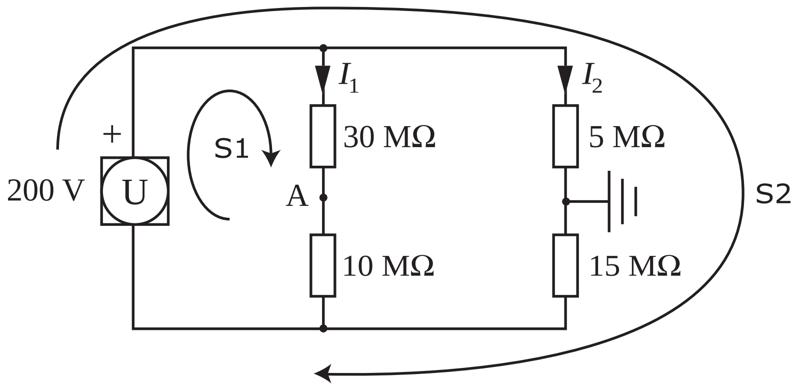
Insatta värden ger $V_A = 10 \cdot 10^3 \cdot 1 \cdot 10^{-3} = 10\text{ V}$

Svar b): Potentialen är $V_A = 10\text{ V}$

Lösn. 12 För att bestämma potentialen i punkten A utgår vi från jordpunkten där potentialen är definierad till 0 V. Genom att beräkna spänningen över $5\text{ M}\Omega$ och $300\text{ M}\Omega$-resistorerna kan vi få potentialen i A. Ohms lag ger dessa spänningar om vi känner strömmarna som går genom dessa resistorer. Vi ansätter ström I_1 i gren 1 och I_2 i gren 2 enligt figuren nedan.

I figuren är även de två parallellkopplade 20 MΩ-resistorerna ersätta av en resistor med resistansen

$$R_p = \frac{20 \cdot 20}{20 + 20} \cdot 10^6 = 10\text{ M}\Omega.$$



För att bestämma strömmarna ska vi tillämpa Kirchhoffs spänningslag i de två slingorna S1 respektive S2, angivna i figuren.

Kirchhoffs spänningslag i slinga S1 ger

$$200 - 30 \cdot 10^6 \cdot I_1 - 10 \cdot 10^6 \cdot I_1 = 0$$

Omskrivning av ekvationen ger

$$I_1 = \frac{200}{30 \cdot 10^6 + 10 \cdot 10^6} = 5 \cdot 10^{-6} \text{ A}$$

Kirchhoffs spänningslag i slinga S2 ger

$$200 - 5 \cdot 10^6 \cdot I_2 - 15 \cdot 10^6 \cdot I_2 = 0$$

Omskrivning av ekvationen ger

$$I_2 = \frac{200}{5 \cdot 10^6 + 15 \cdot 10^6} = 10 \cdot 10^{-6} \text{ A}$$

Svar a): $I_1 = 5\,\mu\text{A}$ och $I_2 = 10\,\mu\text{A}$

Vi kan nu beräkna potentialen i punkten A. Vi börjar vid jordpunkten, går upp genom $5\ \text{M}\Omega$-resistorn. Här går vi mot strömmen vilket innebär att potentialen ökar, vi får ett positivt bidrag. Därefter går vi ner genom $30\ \text{M}\Omega$-resistorn till punkten A. Då går vi med strömmen vilket gör att potentialen sjunker, vi får ett negativt bidrag.

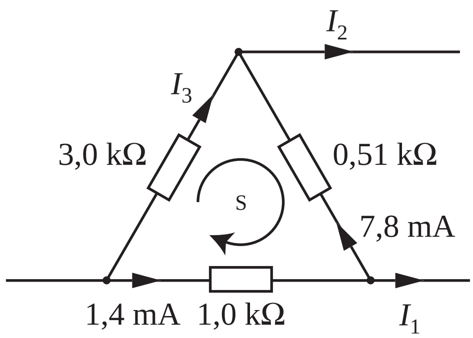
$$V_\text{A} = V_\text{jord} + 5 \cdot 10^6 \cdot I_2 - 30 \cdot 10^6 \cdot I_1$$

Insatta värden ger

$$V_\text{A} = 0 + 5 \cdot 10^6 \cdot 10 \cdot 10^{-6} - 30 \cdot 10^6 \cdot 5 \cdot 10^{-6} = 50 - 150 = \text{-}100 \text{ V}$$

Svar b): Potentialen i punkten A är $V_\text{A} = \text{-}100\ \text{V}$

Lösn. 13



Vi ansätter strömmen I_3 i det vänstra benet i triangeln. Med Kirchhoffs spänningslag i slingan S kan vi beräkna I_3.

Därefter använder vi Kirchhoffs strömlag i den övre noden för att beräkna I_2 respektive den nedre högra noden för att beräkna I_1.

Kirchhoffs spänningslag på slingan S ger

$$-3\cdot 10^3 \cdot I_3 + 0{,}51\cdot 10^3 \cdot 7{,}8\cdot 10^{-3} + 1{,}0\cdot 10^3 \cdot 1{,}4\cdot 10^{-3} = 0$$

Omskrivning ger

$$I_3 = \frac{0{,}51\cdot 10^3 \cdot 7{,}8\cdot 10^{-3} + 1{,}0\cdot 10^3 \cdot 1{,}4\cdot 10^{-3}}{3\cdot 10^3} = 1{,}79\cdot 10^{-3}\ \text{A}$$

Kirchhoffs strömlag i den övre noden ger

$$I_3 + 7{,}8\cdot 10^{-3} - I_2 = 0$$

Omskrivning ger $I_2 = I_3 + 7{,}8\cdot 10^{-3} = 9{,}6\cdot 10^{-3}\ \text{A}$

Kirchhoffs strömlag i den nedre högra noden ger

$$1{,}4\cdot 10^{-3} - 7{,}8\cdot 10^{-3} - I_1 = 0$$

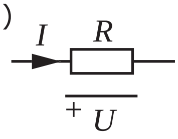
Omskrivning ger $I_1 = -6{,}4\cdot 10^{-3}\ \text{A}$

Svar: $I_1 = -6{,}4\ \text{mA}$ och $I_2 = 9{,}6\ \text{mA}$

A. Formelsamling

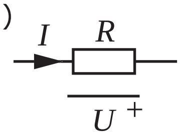
Ohms lag: Sambandet mellan ström och spänning för ledare

a)



$$U = R \cdot I$$

b)



$$U = -R \cdot I$$

Kirchhoffs strömlag: Summan av alla strömmar in till en nod i ett elektriskt nät, är lika med noll.

$$\sum_{i=1}^{n} I_i = 0$$

Kirchhoffs spänningslag: I en sluten strömkrets är summan av alla spänningar räknade med sitt tecken lika med noll.

$$\sum_{i=1}^{n} U_i = 0$$

Seriekoppling av resistorer: Flera seriekopplade resistorer kan ersättas av en resistor enligt

$$R_s = \sum_{i=1}^{n} R_i$$

Parallellkoppling av resistorer: Flera parallellkopplade resistorer kan ersättas av en resistor enligt

$$\frac{1}{R_p} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{R_i}$$

Specialfall, två parallellkopplade: $R_p = \dfrac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$

B. Storheter, enheter och prefix

Storhet		**Enhet**	
Benämning	Beteckning	Benämning	Beteckning
Spänning	U	volt	V
Potential	U	volt	V
Ström	I	ampere	A
Resistans	R	ohm	$\Omega \quad = \mathrm{V/A}$
Konduktans	$G \quad =1/R$	siemens	$\mathrm{S} \quad = \mathrm{A/V}$

Enhetsprefix

För att få praktiska enheter för olika storleksordningar på storheterna finns det vedertagna prefix som sätts framför enhetsbeteckningen. Exempelvis är $1\,\mathrm{kV} = 1 \cdot 10^3\ \mathrm{V} = 1000\ \mathrm{V}$.

Benämning	**Beteckning**	**Tiopotens**
tera	T	10^{12} = 1000000000000
giga	G	10^{9} = 1000000000
mega	M	10^{6} = 1000000
kilo	k	10^{3} = 1000
milli	m	10^{-3} = 0,001
mikro	µ	10^{-6} = 0,000001
nano	n	10^{-9} = 0,000000001
piko	p	10^{-12} = 0,000000000001