Övningsexempel

i

Elkretsanalys

av

Gunnar Petersson

Detta häfte är ett utdrag ur kurskompendiet **ELKRETSANALYS**, som används i undervisningen på KTH i Stockholm. Här finns endast övningsexemplen med lösningar. För utförligare text hänvisas till nämnda kurskompendium.

Övningshäftet kan beställas från
Avdelningen för Teoretisk Elektroteknik
Kungl. Tekniska Hgskolan
100 44 Stockholm

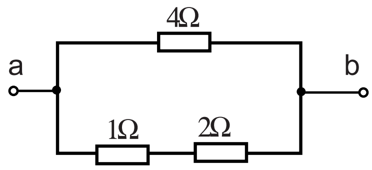
Tel: 08 – 790 81 96

Övningsexempel till Elkretsanalys

Serie- och parallellkoppling

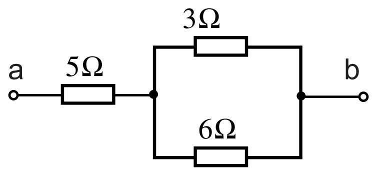
Ex2.1 Bestäm resistansen R_{ab}.

Svar: Resistansen är $1,7\,\Omega$



Ex2.2 Bestäm resistansen R_{ab}.

Svar: Resistansen är $7\,\Omega$



Ex2.3 Följande kretsar kan ersättas av en resistor med resistansen R. Bestäm R.

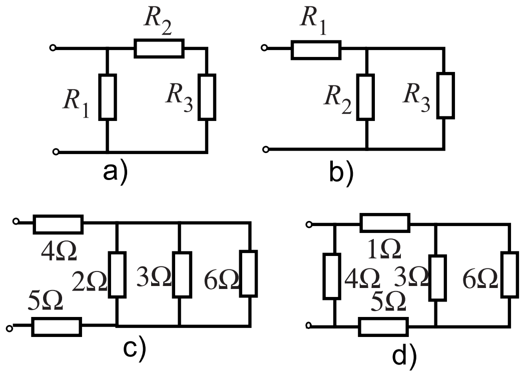
Svar:

a) $$\frac{R_1(R_2+R_3)}{(R_1+R_2+R_3)}$$

b) $$R_1+\frac{R_2R_3}{(R_2+R_3)}$$

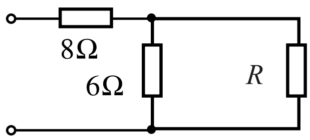
c) $10\,\Omega$

d) $\frac{8}{3}\,\Omega$



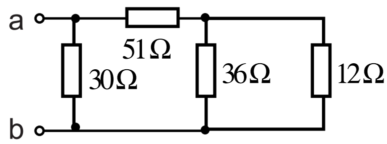
Ex2.4 Bestäm R så att kretsens totala resistans blir $10\,\Omega$. **L**

Svar: $R = 3\,\Omega$



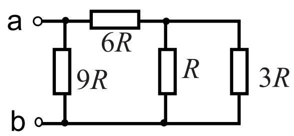
Ex2.5 Beräkna resistansen för tvåpolen ab. **L**

Svar: $20\,\Omega$



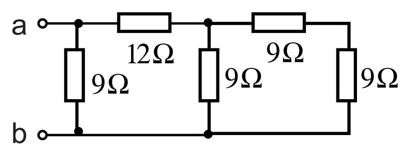
Ex2.6 Beräkna resistansen för tvåpolen ab.

Svar: $3,9\,R$



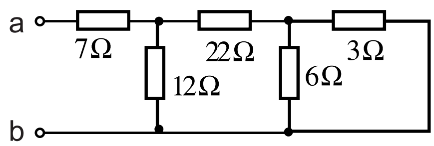
Ex2.7 Beräkna resistansen för tvåpolen ab.

Svar: $6\,\Omega$



Ex2.8 Beräkna resistansen för tvåpolen ab.

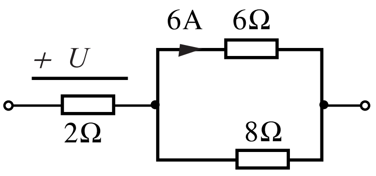
Svar: $15\,\Omega$



Ohms och Kirchhoffs lagar

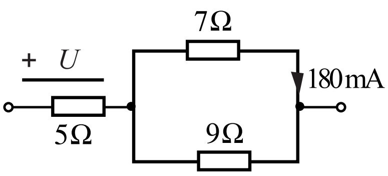
Ex2.9 Bestäm spänningen U. **L**

Svar: $21\,\text{V}$



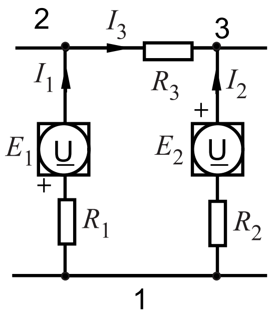
Ex2.10 Bestäm spänningen U.

Svar: $1,6\,\text{V}$



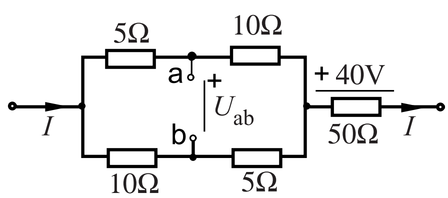
Ex2.11 Ställ upp Kirchhoffs spänningslag för maskan 1-2-3-1. Figurens definitionsriktningar <u>skall</u> användas.

Svar: $-R_1I_1 - E_1 - R_3I_3 - E_2 + R_2I_2 = 0$



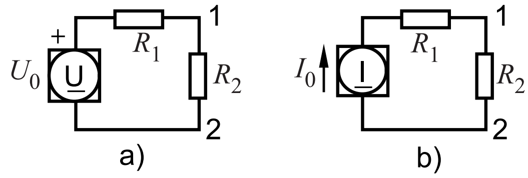
Ex2.12 Bestäm spänningen U_{ab} då spänningen över 50-ohmsresistorn är $40\,\text{V}$.

Svar: $2\,\text{V}$



Spännings- och strömgrening

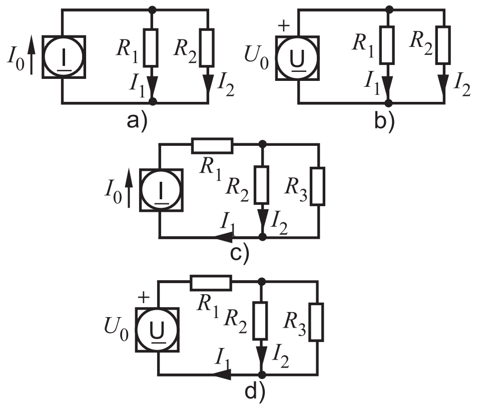
Ex2.13 Bestäm spänningen U_{12} mellan punkterna 1 och 2. **L**



Svar: $a)$ $U_0 \cdot \dfrac{R_2}{(R_1 + R_2)}$

$b)$ $R_2 I_0$

Ex2.14 Bestäm strömmarna I_1 och I_2.



Svar: $a)$ $I_1 = \dfrac{I_0 \cdot R_2}{(R_1 + R_2)}$

$I_2 = I_0 \cdot \dfrac{R_1}{(R_1 + R_2)}$

$b)$ $I_1 = \dfrac{U_0}{R_1},\ I_2 = \dfrac{U_0}{R_2}$

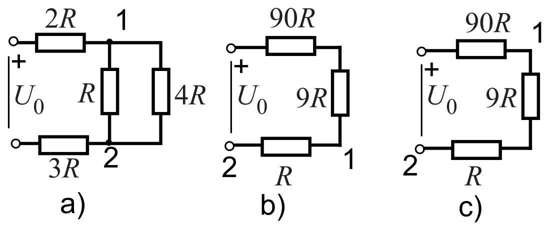
$c)$ $I_1 = I_0,\ I_2 = I_0 \cdot \dfrac{R_3}{(R_2 + R_3)}$

$d)$ $I_1 = \dfrac{U_0}{(R_1 + R_0)}$

$I_2 = I_1 \cdot \dfrac{R_3}{(R_2 + R_3)}$

där $R_0 = \dfrac{R_2 R_3}{(R_2 + R_3)}$

Ex2.15 Bestäm spänningen U_{12} mellan 1 och 2. **L**

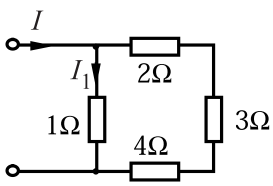


Svar: $a)$ $\dfrac{4U_0}{29}$

$b)$ $\dfrac{U_0}{100}$

$c)$ $\dfrac{U_0}{10}$

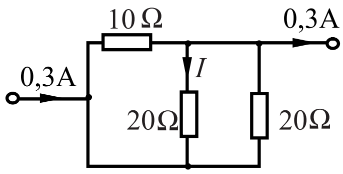
Ex2.16 Bestäm $\dfrac{I_1}{I}$.



Svar: $0,9$

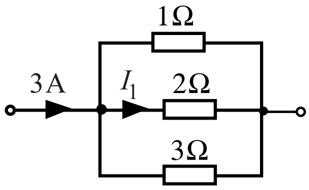
Ex2.17 Bestäm strömmen I. **L**

Svar: $-75\,\text{mA}$



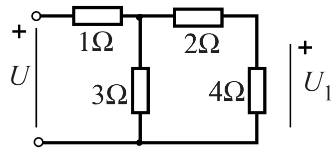
Ex2.18 Bestäm strömmen I_1.

Svar: $(\frac{9}{11})\,\text{A}$



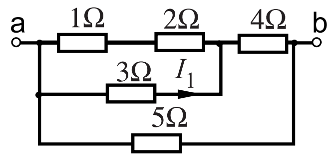
Ex2.19 Beräkna $\dfrac{U_1}{U}$.

Svar: $\dfrac{4}{9}$



Ex2.20 Bestäm strömmen I_1, då $10\,\text{V}$ ansluts till ab! **L**

Svar: $(\frac{10}{11})\,\text{A}$

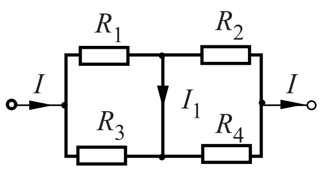


Ex2.21 Bestäm $\dfrac{I_1}{I}$ då

a) $R_1 = R_3 = 3\Omega$ och $R_2 = R_4 = 4\Omega$.
b) $R_1 = 1\,\Omega,\ R_2 = 2\,\Omega,$
$R_3 = 3\,\Omega,\ R_4 = 4\,\Omega$.

Svar: $a)$ 0

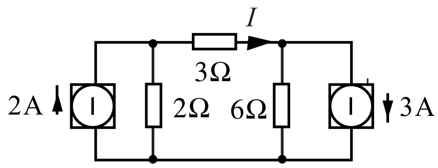
$b)$ $\dfrac{1}{12}$



Superposition

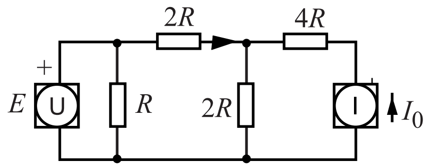
Ex2.22 Bestäm strömmen I med superposition! **L**

Svar: $2\,\text{A}$



Ex2.23 Beräkna spänningen över strömgeneratorn! **L**

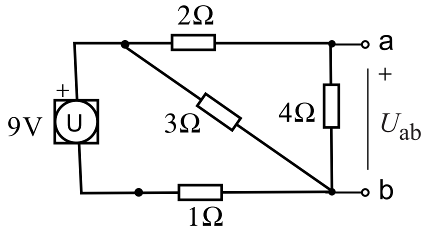
Svar: $E/2 + 5RI_0$



Mask- och nodanalys

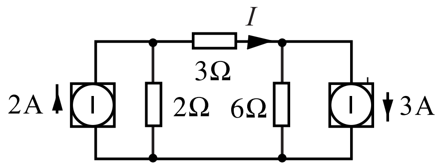
Ex2.24 Bestäm spänningen U_{ab} med maskanalys!

Svar: 4 V



Ex2.25 Beräkna med nodanalys strömmen I!

Svar: 2 A

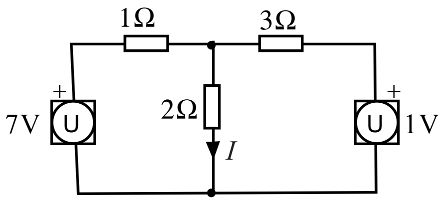


Ex2.26 Beräkna strömmen I med **L**

a) nodanalys

b) superposition

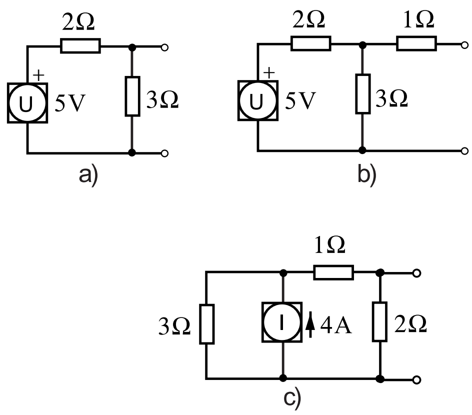
Svar: 2 A



Tvåpolekvivalenter

Ex2.27

Bestäm Thévenin- och Nortonekvivalenterna till de avbildade aktiva tvåpolerna.



Svar:

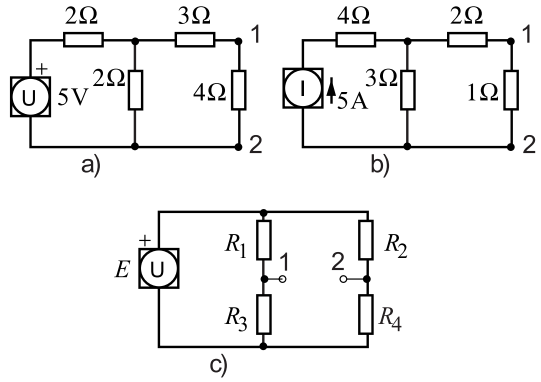
a) $U_0 = 3\,\text{V} \quad R_0 = 1{,}2\,\Omega \quad I_k = 2{,}5\text{A}$

b) $U_0 = 3\,\text{V} \quad R_0 = 2{,}2\,\Omega \quad I_k = 1{,}4\text{A}$

c) $U_0 = 4\,\text{V} \quad R_0 = 1{,}3\,\Omega \quad I_k = 3\text{A}$

Ex2.28

Bestäm tvåpolekvivalenterna till de uppritade näten med avseende på punkterna 1 och 2.



Svar:

a) $U_0 = 1,25\,\mathrm{V} \quad R_0 = 2\,\Omega$

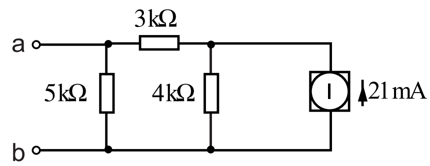
b) $U_0 = 2,5\,\mathrm{V} \quad R_0 = (5/6)\,\Omega$

c) $U_0 = \dfrac{E(R_2R_3 - R_1R_4)}{(R_1 + R_3)(R_2 + R_4)}$

$$R_0 = \frac{R_1R_2R_3 + R_2R_3R_4 + R_3R_4R_1 + R_4R_1R_2}{(R_1 + R_3)(R_2 + R_4)}$$

Ex2.29 **L**

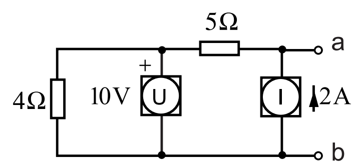
Bestäm Nortonekvivalenten med avseende på ab.



Svar: $I_k = 12\,\mathrm{mA} \quad R_0 = 2,9\,\mathrm{k}\Omega$

Ex2.30

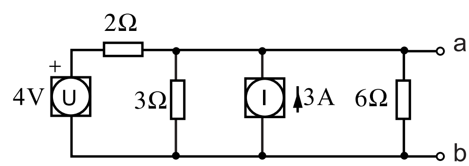
Bestäm Nortonekvivalenten med avseende på ab.



Svar: $I_k = 4\,\mathrm{A} \quad R_0 = 5\,\Omega$

Ex2.31

Bestäm tvåpolekvivalenten med avseende på ab.

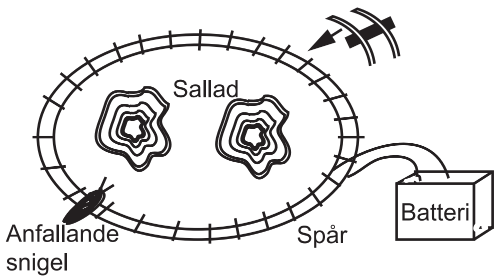


Svar: $I_k = 5\,\mathrm{A} \quad R_0 = 1\,\Omega$

Blandade exempel

Ex2.32 Osquar har kompletterat sin modelljärnväg med en stationsbyggnad. Belysningen i huset ordnade han med 10 seriekopplade glödlampor stämplade 2,4V/0,1A. Det visar sig att lamporna, som ofta går sönder, är mycket besvärliga att byta och han bestämmer sig för att ersätta dem med långlivade orangefärgade lysdioder. I databladet läser han att tillverkaren rekommenderar ett seriekopplingsmotstånd så att strömmen genom dioderna blir 20 mA. Då är spänningsfallet över varje diod $2,1\,\mathrm{V}$. Osquar köper 10 sådana dioder och 3 motstånd på $100\,\Omega$. Hur ser kopplingen ut? **L**

Ex2.33 Osquldas salladsodling har angripits av spanska sniglar, även kallade mördarsniglar. Osqulda vill inte ta till kraftiga gifter och bygger ett elektriskt stängsel bestående av sin fars modelljärnvägsspår. Det visar sig att en snigel dör när den tar sig över spåret som ansluts till 24 V batteri (tomgångsspänning). **L**



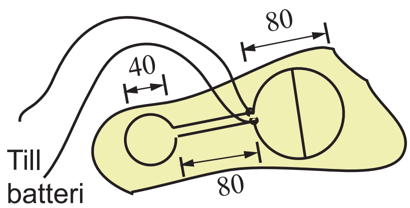
Om många sniglar anfaller samtidigt, vilket är vanligt, måste batteriets inre resistans hållas låg. Hur stor får den vara om man kan tillåta att spänningen sjunker ner till 22 V vid en attack av 44 sniglar? Anta att en snigel har en resistans av $0,88\,\mathrm{k}\Omega$ när den ligger tvärs över spåret. Som en sann djurvän vill Osqulda meddela att det endast är sniglar som dödas. Den låga spänningen är ofarlig för andra djur och kryp.

Svar: $R_0 \leq 1,8\,\Omega$

Ex2.34 I ett uppslagsverk hittar Osqulda följande information: ”En elektrisk ål kan producera spänningar upp till 450 V och strömmar upp till 1 A (effekt upp till 450 W!)”. Osqulda ser omedelbart att verkets redaktörer saknar kompetens inom Elkrets. Vad är det korrekta värdet på denna maximala effekt? **L**

Svar: 112 W

Ex2.35 Osqulda fryser om fötterna när hon åker skidor. Hon monterar en värmetråd i innersulan enligt vidstående figur. Vid praktiska tester visar det sig att värmen är ojämnt fördelad och hon kompletterar med ytterligare en tråd. Den extra tråden är vinkelrät mot de raka trådarna. Beräkna den totala effektutvecklingen i tråden efter modifikationen! **L**



Trådens resistans per längd är $R_\ell = 100\,\Omega\,/\mathrm{m}$. Batteriet är på 1,5 V. Resistansen i batteriledningarna försummas.

Svar: $0,21\,\mathrm{W}$ per sula

Ex2.36 Linus reser med den Transsibiriska järnvägen från Moskva till Vladivostok. När han kommer till Irkutsk tar batteriet i hans ficklampa slut. Han visar sin ficklampa i en affär på stationen och får ett nytt batteri som passar precis! Imponerad av den internationella standariseringen undersöker han batteriet i detalj. Med stora tecken står det 3,7 B. Han vet att B på ryska står för volt och blir konfunderad. Lampan fungerar lika bra som förr men på hans gamla batteri stod ju 4,5 V. Igor, en rysk teknolog som Linus träffade på tåget, berättar att den ryska normen GOST föreskriver att man skall uppge spänning under belastning med ett motstånd på 10 Ω och inte tomgångsspänning, som man gör i Sverige. Tomgångsspänningen beror på kemin i batteriet och säger inte något om batteriets kvalitet. Beräkna, med hjälp av dessa uppgifter, inre resistansen hos det ryska ficklampsbatteriet. **L**

Svar: $2,2\,\Omega$

Reciprocitet

Ex2.37 Givet en passiv, linjär, reciprok tvåport. Först ansluts en emk (E_1) till sida 1, och tomgångsspänningen blir U_0 på sida 2.
Ansluter man i stället en spänningskälla med emken E_2 och inre resistansen R_2 till sida 2 och kortsluter sida 1, blir kortslutningsströmmen på sida 1 I_1.
Hur stor är spänningen på ingången till sida 2?

Svar: $E_2 - R_2 \dfrac{E_1}{U_0} I_1$

Ex2.38 Givet en passiv, linjär, reciprok tvåport. En emk med källspänningen 12 V ansluts till sida 1 och en emk med källspänningen 6 V till sida 2. **L**
Ersätter man emken på sida 2 med en kortslutning, ökar strömmen på sida 1 från 12 A till 14 A.
Hur stor är kortslutningsströmmen på sida 2?

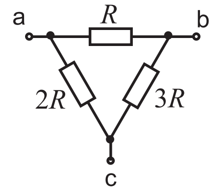
Svar: 4 A

Delta-Y-transformation

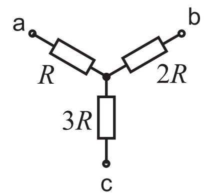
Ex2.39

Bestäm ekvivalenta Y-kopplingens resistans.

Svar: $R_a = \dfrac{R}{3}, \quad R_b = \dfrac{R}{2}, \quad R_c = R$

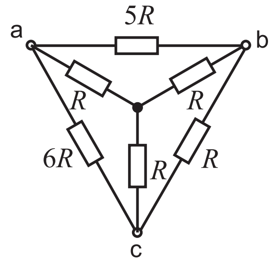


Ex2.40 Bestäm resistanserna hos den ekvivalenta Δ-kopplingen!



Svar: $R_{\text{ab}} = \dfrac{11R}{3}$, $R_{\text{ac}} = \dfrac{11R}{2}$, $R_{\text{bc}} = 11R$

Ex2.41 Bestäm komponentvärdena hos det ekvivalenta Y-nätet!
Ledning: Gör om Y-kopplingen till Δ-koppling först.
Använd sedan parallellkoppling och gör till sist om den så erhållna Δ-kopplingen till ett Y.

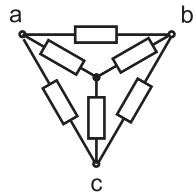


Svar: $R_{\text{a}} = \dfrac{30R}{37}$, $R_{\text{b}} = \dfrac{45R}{148}$, $R_{\text{c}} = \dfrac{12R}{37}$

Ex2.42 Bestäm inresistansen mellan a och c i föregående uppgift!

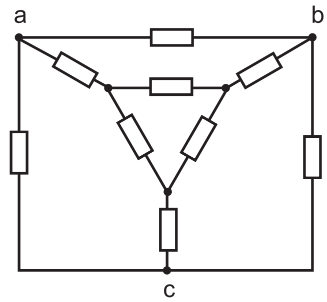
Svar: $\dfrac{42R}{37}$

Ex2.43 Bestäm resistansen mellan a och c i vidstående nät! **L**
Samtliga resistorer har resistansen R.



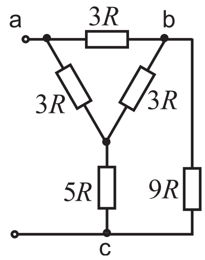
Svar: $R_{\text{ac}} = R/2$

Ex2.44 Bestäm resistansen mellan a och c i vidstående nät! **L**
Samtliga resistorer har resistansen R.



Svar: $R_{\text{ac}} = 8R/15$

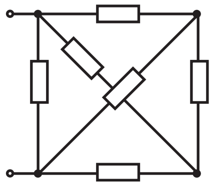
Ex2.45 Bestäm resistansen mellan a och c i vidstående nät!



Svar: $R_{\text{ac}} = 4,8\,R$

Ex2.46 Bestäm resistansen mellan ingångsklämmorna till vidstående nät!
Samtliga resistorer har resistansen R.

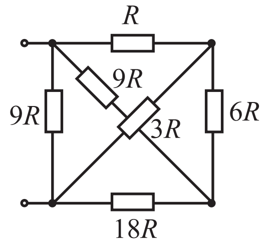
Svar: $R/2$



L

Ex2.47 Bestäm resistansen mellan ingångsklämmorna till vidstående nät!

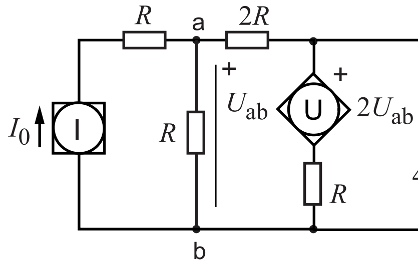
Svar: $R_{\text{ac}} = 2,51R$



Beroende generatorer

Ex3.1 Bestäm spänningen U_{ab} i vidstående nät.

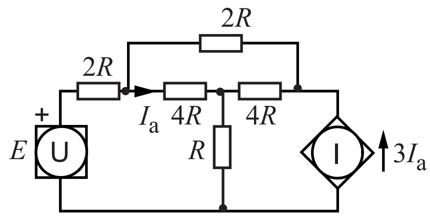
Svar: $U_{\text{ab}} = \dfrac{14}{11} R I_0$



L

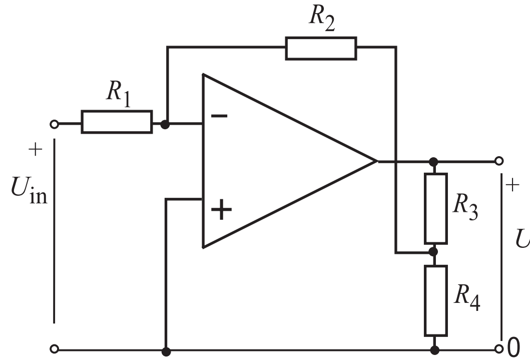
Ex3.2 Bestäm strömmen I_{a} i vidstående nät.

Svar: $I_{\text{a}} = \dfrac{E}{6R}$



Operationsförstärkare

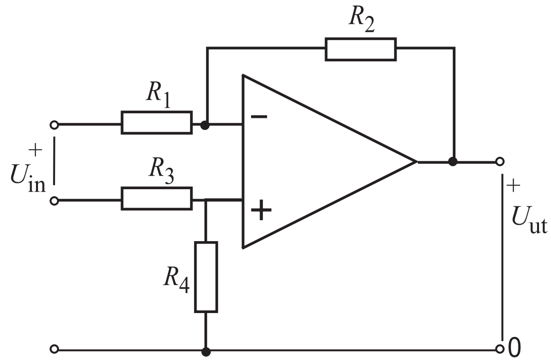
Ex3.3 Detta är en modifierad inverterande förstärkare. En spänningsdelare på utgången ger en extra frihetsgrad så att förstärkningen och inimpedansen kan väljas oberoende av varandra. Mycket användbart med olinjära återkopplingsnät eller om hög förstärkning samtidigt med hög inimpedans önskas. Beräkna förstärkning $U_{\text{ut}}/U_{\text{in}}$ och inresistans R_{in} uttryckt i R_1, R_2, R_3 och R_4 exakt och i fall då $R_2 \gg R_1$, R_3 och R_4!



Svar: $F = \dfrac{U_{\text{ut}}}{U_{\text{in}}} = -\dfrac{R_2}{R_1}[1 + \dfrac{R_3}{R_4} + \dfrac{R_3}{R_2}]$, $R_{\text{in}} = R_1$

För $R_2 \gg R_1$, R_3 och R_4 blir $F = -\dfrac{R_2}{R_1}[1 + \dfrac{R_3}{R_4}]$

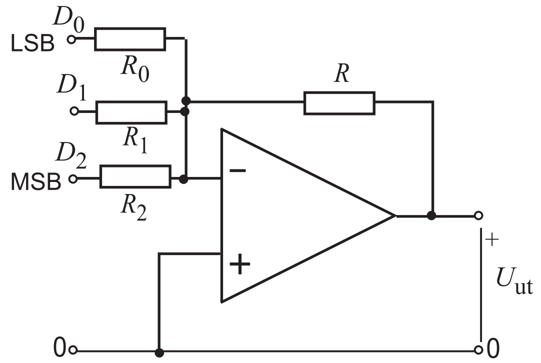
Ex3.4 En operationsförstärkare är inkopplad enligt figuren. Beräkna spänningsförstärkningen $U_{\text{ut}}/U_{\text{in}}$!



Svar: $F = \dfrac{U_{\text{ut}}}{U_{\text{in}}} = -\dfrac{R_2 + R_4}{R_1 + R_3}$

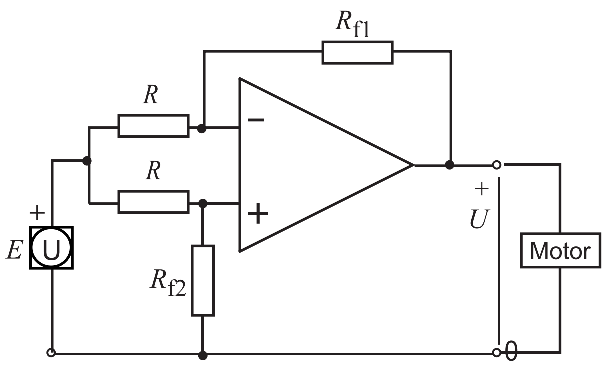
Ex3.5 För att precisionsstyra sin brödrost behöver Osquar en tre-bitars digital-analog omvandlare. Sådana finns inte att köpa och han bestämmer sig för att bygga en. Han väljer en inverterande förstärkarkoppling med 3 ingångar. **L**

De digitala signalerna D_0, D_1 och D_2 kan anta 0 V eller 5 V och på utgången vill Osquar ha spänning U_{ut} som varierar mellan 0 V och −70 V i steg om 10 V. Återkopplingsresistansen R väljer Osquar till 10 kΩ. Bestäm R_0, R_1 och R_2! Operationsförstärkaren är ideal.



Svar: $R_0 = 5\,\text{k}\Omega$, $R_1 = 2,5\,\text{k}\Omega$, $R_2 = 1,25\,\text{k}\Omega$

Ex3.6 Emil har problem med sin nya solfångare. Den är vänd mot söder och fungerar bra endast mitt på dagen. Osquar, som är klar med sin kurs i Elkrets, föreslår följande lösning. Solfångaren monteras så att den kan vridas efter solen med en elmotor. För att den skall följa solen bygger Osquar ett nät enligt figuren. **L**



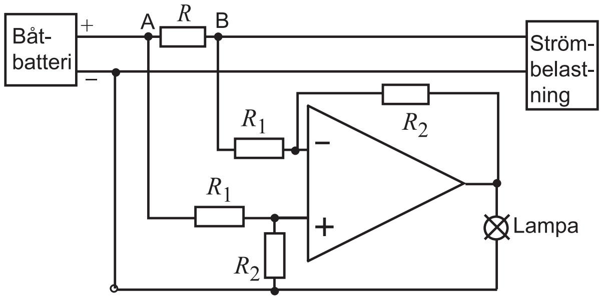
R_{f1} och R_{f2} är fotomotstånd, dvs tvåpoler vilkas resistans varierar med belysningen. De monteras så att de får lika stark belysning (samma resistans) när solfångaren är vänd mot solen.

a. Beräkna motorspänningen U i detta fall!

b. Beräkna U när $R_{f1} \neq R_{f2}$!
Fungerar anordningen som avsett? Motivera!

Svar: a) $U = 0\,\mathrm{V}$ b) $U = E\,\dfrac{R_{f2} - R_{f1}}{R + R_{f2}}$

Ex3.7 Martin behöver en batterivakt till sin segelbåt. Han vill att en lampa skall lysa när mer än 50 mA dras från batteriet så att han inte glömmer stänga av strömslukande apparater och sedan står utan ström till sina dataspel. Martin bestämmer sig för en differenskopplad operationsförstärkare med vars hjälp strömmen i motståndet R kan mätas. När strömmen överskrider 50 mA skall lampan L tändas. **L**



Lampan behöver 6 V för att lysa. Batteriets spänning är 12 V. Resistanserna $R_1 = 1,0\,\mathrm{k\Omega}$ och $R_2 = 120\,\mathrm{k\Omega}$. Hjälp Martin att bestämma R!

Svar: $R = 1,0\,\Omega$

Inkopplingsförlopp

Ex4.1 En ideal spole med induktansen L ansluts vid tidpunkten $t = 0$ till en ideal spänningskälla med emken U_0.
Bestäm strömmen.

Svar: $U_0\,\dfrac{t}{L}$

Ex4.2 En spole med induktansen L och resistansen R ansluts vid $t = 0$ till en ideal spänningskälla med emken U_0. Bestäm strömmen som funktion av tiden och rita in den i ett diagram för $L = 1\,\mathrm{mH}$, $R = 10\,\Omega$ och $U_0 = 6$ V. **L**

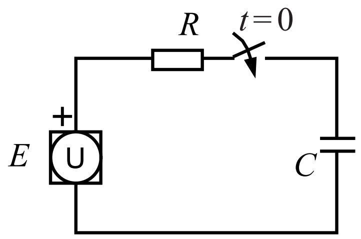
Svar: $0,6\,(1 - e^{-10000t/[s]})$ A

Ex4.3 En kondensator med kapacitansen 1 µF ansluts vid tidpunkten $t = 0$ till en likströmskälla, som levererar likströmmen 100 mA. Bestäm spänningen över kondensatorn, om den för $t < 0$ **L**

a) är oladdad,
b) har laddningen 2 µC!

Svar: a) $u(t) = 10^5\,t/[\mathrm{s}]\,\mathrm{V}$ b) $u(t) = (2 + 10^5\,t/[\mathrm{s}])\,\mathrm{V}$

Ex4.4 I vidstående krets levererar spänningskällan likspänningen $E = 12\,\mathrm{V}$. **L**
a) Bestäm kondensatorspänningen som funktion av tiden!
b) Bestäm strömmen som funktion av tiden!
I båda uppgifterna antas att kondensatorn är oladdad för $t < 0$, samt att $R = 10\,\mathrm{k\Omega}$ och $C = 1000\,\mathrm{\mu F}$. Rita de sökta storheterna i ett diagram!



Svar: $a)$ $12\,(1 - e^{-0{,}1\,t/[\mathrm{s}]}\,)\,\mathrm{V}$

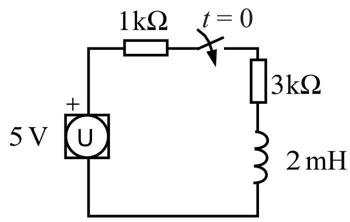
$b)$ $1,2\,e^{-0{,}1\,t/[\mathrm{s}]}\,\mathrm{mA}$

Ex4.5 En ideal kondensator på $1\,\mathrm{\mu F}$ är uppladdad till spänningen U_0. Vid $t = 0$ ansluts till den en resistor med resistansen $2\,\mathrm{k\Omega}$. Bestäm tidkonstanten, dvs den tid som åtgår för att spänningen skall hinna sjunka till $1/e$ av utgångsvärdet!

Svar: $2\,\mathrm{ms}$

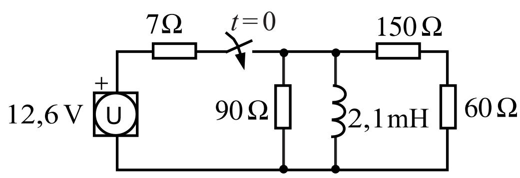
Blandade exempel

Ex4.6 Bestäm strömmen $0,1\,\mathrm{\mu s}$ efter det att likspänningskällan har anslutits till nätet! **L**



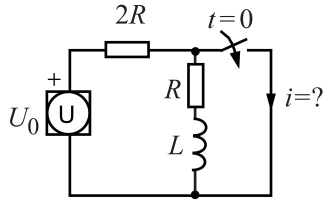
Svar: $0,23\,\mathrm{mA}$

Ex4.7 Vid tiden $t = 0$ ansluts spänningskällan till nätet. Bestäm momentanvärdet av strömmen genom spolen för $t > 0$! **L**
Ledning: Tvåpolsatsen.



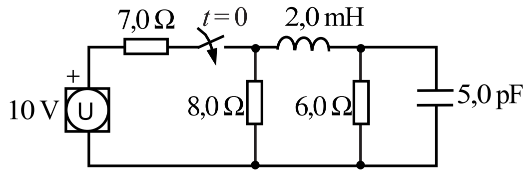
Svar: $1,8\,(1 - e^{-3000\,t/[\mathrm{s}]}\,)\mathrm{A}$

Ex4.8 I vidstående krets inträffar en kortslutning vid $t = 0$. Bestäm strömmen i kortslutningsledningen som funktion av tiden!



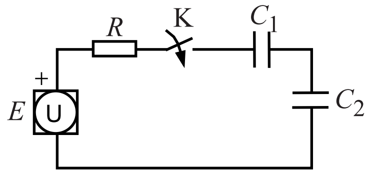
Svar: $\dfrac{U_0}{6R}\,(3 - 2\,e^{-\frac{R}{L}\,t/[\mathrm{s}]}\,)$

Ex4.9 Vid tiden $t = 0$ ansluts likspänningskällan till nätet. Bestäm strömmen från spänningskällan i första ögonblicket efter tillslaget, dvs $i(0+)$!



Svar: $0,67\,\mathrm{A}$

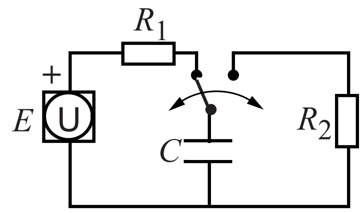
Ex4.10 Bestäm spänningen över C_2 som funktion av tiden, om omkopplaren K slås till vid tidpunkten $t = 0$! För $t < 0$ är båda kondensatorerna urladdade. $R = 250\,\Omega$, $C_1 = 10\,\mu\mathrm{F}$, $C_2 = 40\,\mu\mathrm{F}$ och $E = 1,5\,\mathrm{V}$. **L**



Svar: $0,3\left[1 - e^{-500\,t/[\mathrm{s}]}\right]\mathrm{V}$ för $t > 0$

Ex4.11 När man skall omvandla en analog signal till digital form använder man en Sample&Hold-krets före omvandlaren. Kretsen har till uppgift att ta momentana prover på signalen och hålla dessa konstanta under den tid omvandlaren behöver för att digitalisera. **L**

Detta realiseras genom att en kondensator först under en mycket kort tid kopplas mellan två noder där spänningen skall mätas och sedan kopplas till omvandlarens ingång. Kondensatorns kapacitans väljs så liten som möjligt för att uppladdningen skall gå fort och för att inte störa mätobjektet.
När den är kopplad till omvandlaren skall tidkonstanten vara stor.



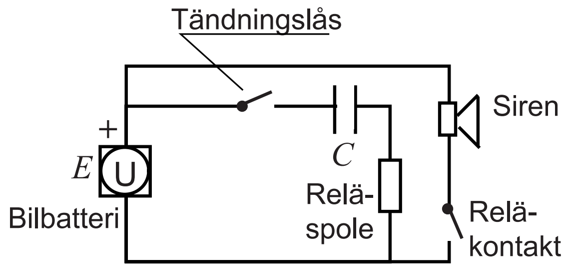
Vi vill att strömmen som dras från mätobjektet skall vara mindre än $40\,\mu\mathrm{A}$ $10\,\mathrm{ns}$ efter anslutningen. Mätobjektet kan ses som en tvåpolekvivalent med tomgångsspänningen $E = 4\,\mathrm{V}$ och inre resistansen $R_1 = 100\,\Omega$.
a. Dimensionera C! (Kondensatorn antas vara urladdad från början. Vi tittar på den första samplingen.)
När sedan kondensatorn kopplas till omvandlaren kommer den att urladdas via dennas ingångsresistans, som är $R_2 = 10\,\mathrm{M}\Omega$.
b. Beräkna hur lång tid omvandlaren har på sig för att digitalisera signalen! Kondensatorns spänning får inte sjunka mer än 1% från startvärdet.

Svar: a) $C = 14,5\,\mathrm{pF}$ b) $t_2 = 1,45\,\mu\mathrm{s}$

Ex4.12 Ett relä är en elektromekanisk komponent där ett system av kontakter manövreras med hjälp av en elektromagnet. Då kan till- och frånslag av stora strömmar och spänningar styras med små effekter. Emil skall bygga ett tjuvlarm till sin bil. Han har ett relä där spolens resistans är $4\,\mathrm{k}\Omega$. Spolens induktans kan försummas. **L**

Kontakterna är normalt öppna. För att aktivera kontakterna krävs en spolspänning av 8 V och de förblir slutna tills spänningen sjunker till 6 V. Emil ansluter en siren till bilbatteriet via ett kontaktpar. Han vill att sirenen skall tjuta i tio sekunder efter det att tjuven vridit om startnyckeln eller tjuvkopplat. Emil, som inte har läst Elteknik men tror sig äga nödig kännedom om elektriska kretsar, kopplar enligt följande:

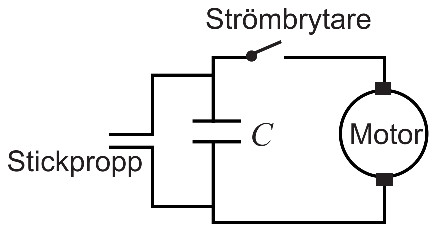
Hjälp Emil att beräkna det erforderliga värdet på kapacitansen. Kan man med mycket enkla medel göra en grov uppskattning av detta värde? Bilbatteriet har tomgångsspänningen $E = 12,0\,\mathrm{V}$. Inre resistansen kan försummas.



Svar $\quad C = 3,6\,\mathrm{mF} \quad$ Grov uppskattning ger $C \approx 2,5\,\mathrm{mF}$

Ex4.13 Jonas sambo fick en stöt när hon vidrörde stickproppen på en nyss använd elvisp. För att bevisa att det bara var inbillning startar Osquar vispen igen, stänger av den, drar ut stickproppen och känner på dess stift. Han får en ännu kraftigare stöt! Nu blir han nyfiken och undersöker fenomenet. Han upprepar experimentet och noterar att effekten är olika stark vid olika tillfällen trots att han berör stiften omedelbart efter frånkopplingen. Han skruvar isär vispen och finner följande koppling: **L**

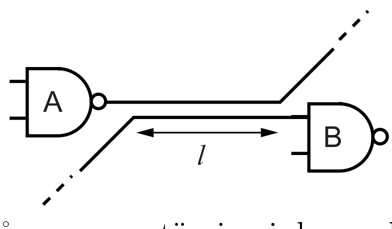
C är en s.k. avstörningskondensator som krävs för EU:s CE-märkning.
a. Varför är stöten inte lika kraftig varje gång?
b. Med hjälp av sitt oscilloskop mäter Osquar spänningen mellan stickproppens stift. Det visar sig att den minskar till hälften efter sex sekunder. Efter hur lång tid minskar den till 1%?



Ledning: En icke ideal kondensator kan ses som en parallellkoppling av en ideal kapacitans och en resistans.

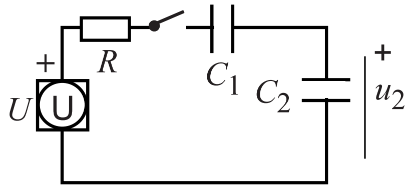
Svar: $\quad$ Efter 40 s

Ex4.14 I figuren visas en del av ett digitalt nät. Konstruktören, som behärskar den digitala tekniken men har brister på den analoga sidan, placerade två parallella ledare med längden ℓ nära varandra med kapacitansen per längd $C_\ell = 400\,\mathrm{pF/m}$ som följd. **L**



När signalen i den övre ledningen går från 0 V till 5 V får man en störning i den andra ledningen. Hur lång får den parallella sektionen vara innan störningen resulterar i att en falsk puls registreras av grinden B? Vi antar att det krävs minst 2,5 V för detta.

Ledning: Kopplingen kan modelleras mha detta nät, där $C_2 = 4\,\text{pF}$ är B-grindens ingångskapacitans, $R = 100\,\Omega$ är A-grindens utresistans och $C_1 = C_\ell \cdot \ell$ är den oönskade kapacitansen mellan ledarna.
$U = 5\,\text{V}$.
Laddningarna hos kondensatorerna är lika stora.

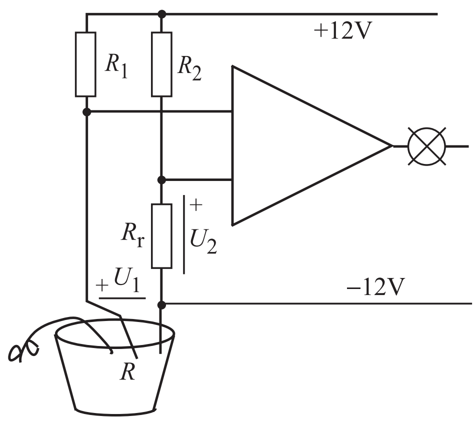


Svar: 1 cm

Ex4.15 Polisen utreder ett mord. För att fastställa tidpunkten mäter man temperaturen på kylarvattnet i offrets bil. Den är 60° när polisen anländer och 40° en och en halv timme senare. Beräkna när bilens motor stängdes av (då var temperaturen 95°). Omgivande luftens temperatur är 20°. **L**
Ledning: Gör följande analogi: temperatur ⇔ potential, temperaturskillnad ⇔ spänning, värmeflöde ⇔ strömstyrka, kylsystemmets massa ⇔ kapacitans och den termiska resistansen mot omgivningen ⇔ resistans.

Svar: 82 min före första mätningen.

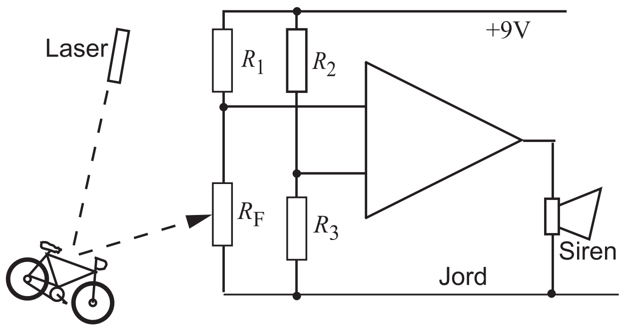
Ex4.16 På grund av några tunga kurser har Osqulda försummat sina krukväxter. För att rationalisera hanteringen bygger hon en fuktindikator som skall påminna när det är dags att vattna. Hon sticker två trådar ner i krukan. Resistansen mellan trådarna är en funktion av vattenhalten (torr jord är praktiskt taget oledande). För att få entydig indikering vill hon använda en komparator. Den skall jämföra spänningsfallet mellan trådarna i krukan U_1 med spänningsfallet U_2 över en känd resistans R_r som kan väljas olika stor (olika växter kräver olika mycket vatten). **L**



$R_2 = R_r = 10\,\text{k}\Omega$. Genom experiment med sin favoritfikus fann Osqulda att den trivs bäst när jordens resistans mellan trådarna är $R > 6\,\text{k}\Omega$. Den behöver alltså vattnas när $R < 6\,\text{k}\Omega$. Är jorden för torr skall lampan som kopplas till komparatorns utgång lysa. Beräkna R_1 samt komplettera kopplingsschemat med rätt tecken på komparatorns ingångar och lampans andra anslutning.

Svar: $R_1 = 6\,\text{k}\Omega$

Ex4.17 Osquldas cykel stals trots att den var låst alldeles utanför lägenheten. För pengarna hon fick från försäkringsbolaget köpte hon en ny, men nu litar hon inte på mekaniska lås. Hon köper en liten laserpekare som hon monterar i fönstret och riktar mot cykels stänkskärm. Det reflekterade ljuset faller in på ett fotomotstånd som hon kopplar till en operationsförstärkare som i sin tur är kopplad till en siren. **L**

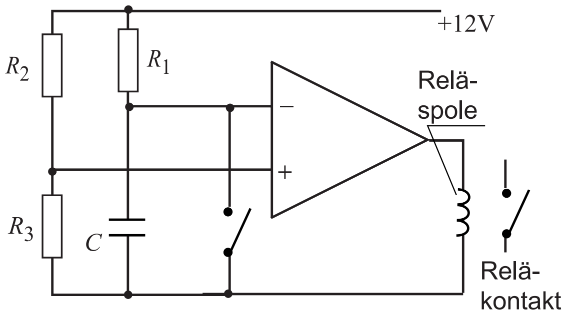


Om cykeln flyttas bryts laserstrålen och sirenen tjuter.
Det belysta fotomotståndet har en resistans av $10\,\mathrm{k\Omega}$ och i mörkret ökar resistansen till $10\,\mathrm{M\Omega}$. Sirenen aktiveras vid en spänning större än $8\,\mathrm{V}$. Osqulda tänker använda ett batteri på $9\,\mathrm{V}$ för att mata operationsförstärkaren. $R_1 = R_2 = 10\,\mathrm{k\Omega}$.
Föreslå ett lämpligt värde på R_3 och komplettera symbolen för operationsförstärkaren med korrekta tecken på ingångarna! Teckenvalet skall motiveras.

Svar: Man bör välja R_3 i intervallet $10\,\mathrm{k\Omega} < R_3 < 10\,\mathrm{M\Omega}$

Ex4.18 **L**

Osquar behöver en timer till sin kaffebryggare. Timern skall startas med en kort tryckning på startknappen och bryta strömmen till bryggaren efter 10 minuter.

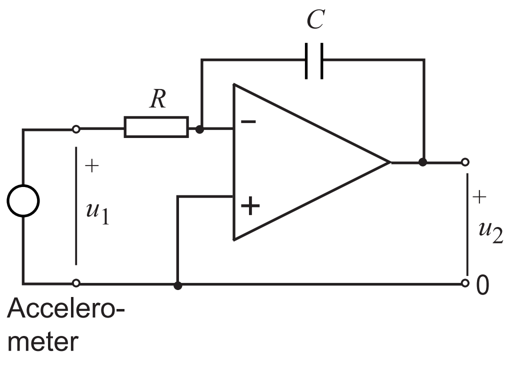


a) Bestäm värdet på kondensatorn C om $R_1 = 8,2\,\mathrm{M\Omega}, R_2 = 470\mathrm{k\Omega}, R_3 = 220\mathrm{k\Omega}$.
b) En verklig kondensator har alltid en parallellresistans R. Bestäm värdet på kondensatorn C om $R = 10\,\mathrm{M\Omega}$, $R_1 = 8,2\,\mathrm{M\Omega}$, $R_2 = 470\mathrm{k\Omega}$, $R_3 = 220\mathrm{k\Omega}$.
c) Vad händer om kondensatorn är av sämre kvalitet och har resistansen $R = 3,3\,\mathrm{M\Omega}$?

Svar: a) $C = 192\,\mu\mathrm{F}$ b) $C = 153\,\mu\mathrm{F}$ c) Kretsen fungerar inte!

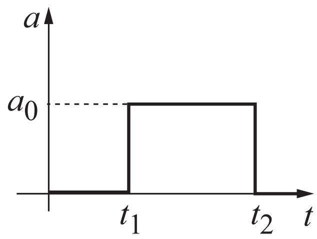
Ex4.19 **L**

Rymdskeppens hastighetsmätare mäter relativt objekt som man dockar med eller landar på. Vid små förflyttningar i rymden är sådana hastigheter relativt något fast objekt inte relevanta och man mäter en ”absolut” hastighet genom att integrera signalen från en accelerometer. Som bekant från mekaniken är ju $\int \boldsymbol{a}\mathrm{d}t = \boldsymbol{v}$.



Integrationen utförs av en återkopplad op-amp enligt figuren.

Rymdskeppet skall korrigera sin bana och startar en styrraket vilket resulterar i en acceleration enligt vidstående figur.
Beräkna och rita utspänningen u_2 som funktion av tiden!



Svar: Då $t < t_1$ är $u_2 = 0$

Då $t_1 < t < t_2$ är $u_2 = -\dfrac{k}{RC}\,a(t - t_1)$

Då $t > t_2$ är $u_2 = -\dfrac{k}{RC}\,a(t_2 - t_1)$

Växelström

Ex5.1 Bestäm med hjälp av komplexräkning summan av spänningarna

$u_1 = 100\cos(\omega t + \arctan(3/4))\,\mathrm{V}$
$u_2 = 50\cos(\omega t + \arctan(4/3))\,\mathrm{V}$

Svar: $u_1 + u_2 = 149\cos(\omega t + 0,74)\,\mathrm{V}$

Ex5.2 En växelspänning har tidsberoendet $u = 100\cos(\omega t + 0,7)$ V. **L**
Bestäm
a) effektivvärdet,
b) fasvinkeln (i radianer och grader),
c) komplexa spänningen U!

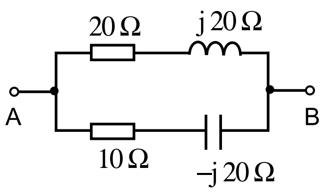
Svar :	a)	$\lvert U\rvert = 70,7\,\mathrm{V}$
	b)	$0,7\,\mathrm{rad} = 40^\circ$
	c)	$(54 + \mathrm{j}\,46)\,\mathrm{V}$

Ex5.3 En spänning har momentanvärdet $u(t) = (4\cos\omega t + 3\sin\omega t)$ V.
Bestäm komplexa spänningen på polär form i effektivvärdesskala, dvs på formen $U = \lvert U\rvert\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\arg U}$, med $\cos\omega t$ som riktfas!

Svar: $\dfrac{5}{\sqrt{2}}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\arctan(3/4)}\,\mathrm{V}$

Ex5.4 Bestäm impedansen Z_{AB} för tvåpolen!

Svar: $(20 - \mathrm{j}20/3)\,\Omega$

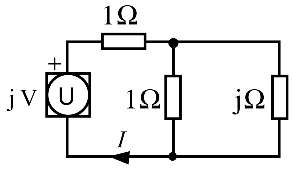


Ex5.5 En impedans $Z = (1 + \mathrm{j}\sqrt{3})\,\Omega$ ansluts till en spänning $U = (2 + \mathrm{j})\,\mathrm{V}$. Bestäm komplexa strömmen!

Svar: $\left(\dfrac{2 + \sqrt{3} - \mathrm{j}(2\sqrt{3} - 1)}{4}\right)\mathrm{A}$

Ex5.6 Bestäm komplexa I!

Svar: $\dfrac{1}{5}(1 + 3\mathrm{j})\,\mathrm{A}$



Ex5.7 Bestäm komplexa strömmen I med U som riktfas! **L**

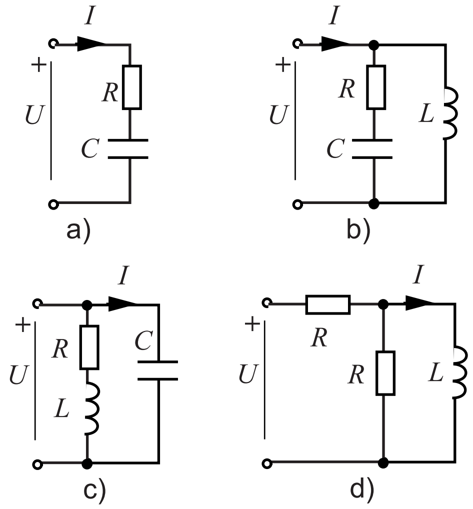
Svar:

a) $\dfrac{\mathrm{j}\omega CU}{1 + \mathrm{j}\omega CR}$

b) $\dfrac{U}{\mathrm{j}\omega L} + \dfrac{U}{R + \frac{1}{\mathrm{j}\omega C}}$

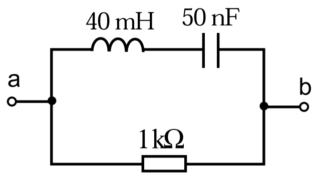
c) $\mathrm{j}\omega CU$

d) $\dfrac{U}{R + \mathrm{j}2\omega L}$



Ex5.8 Bestäm admittansen för tvåpolen ab!
Vinkelfrekvensen är 20 krad/s.

Svar: $(1 + 5\mathrm{j})\,\mathrm{mS}$

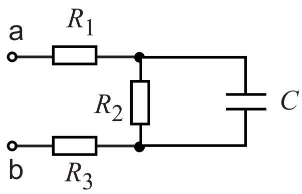


Ex5.9 Impedansen för tvåpolen ab kan skrivas som $Z_{\mathrm{ab}} = R + \mathrm{j}X$. Bestäm R respektive X! **L**

Svar:

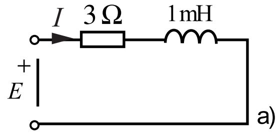
$$R = R_1 + R_3 + \frac{R_2}{1 + (\omega R_2 C)^2}$$

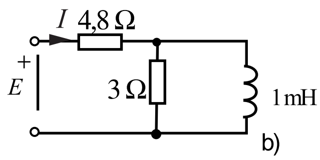
$$X = -\frac{\omega R_2^2 C}{1 + (\omega R_2 C)^2}$$



Ex5.10 Bestäm effektivvärdet av strömmen I om $|E| = 20\,\mathrm{V}$ och vinkelfrekvensen är 4 krad/s.

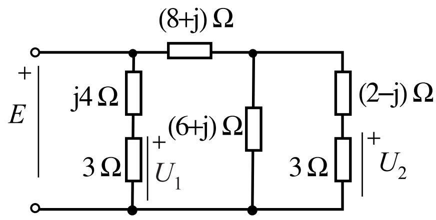
Svar: a) $|I| = 4\,\mathrm{A}$ b) $2,9\,\mathrm{A}$





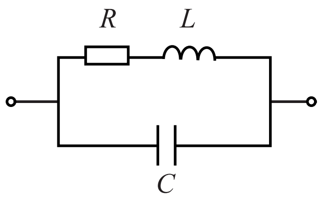
Ex5.11 Bestäm effektivvärdet av U_1 och U_2 , om $|E| = 6\,\mathrm{V}$!

Svar: $|U_1| = 3,6\,\mathrm{V}$ och $|U_2| = 0,9\,\mathrm{V}$



Ex5.12 a) Bestäm denna tvåpols resistans och reaktans!
b) Kretsen ansluts till en spänningsgenerator U.
Bestäm den totala strömmen i kretsen!

L

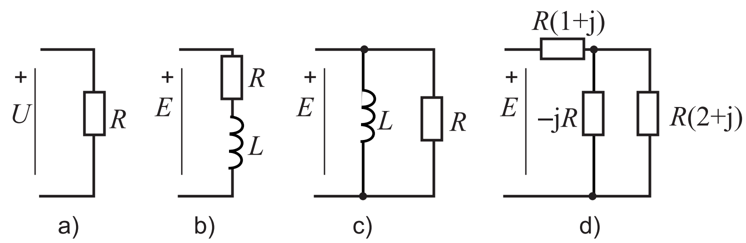


Svar: a) Resistansen $= R/N$,
Reaktansen $= (\omega L - \omega C R^2 - \omega^3 L^2 C)/N$
där $N = (1 - \omega^2 LC)^2 + (\omega CR)^2$

b) $I = U(\mathrm{j}\omega C + \dfrac{1}{(R + \mathrm{j}\omega L)})$

Komplex effekt

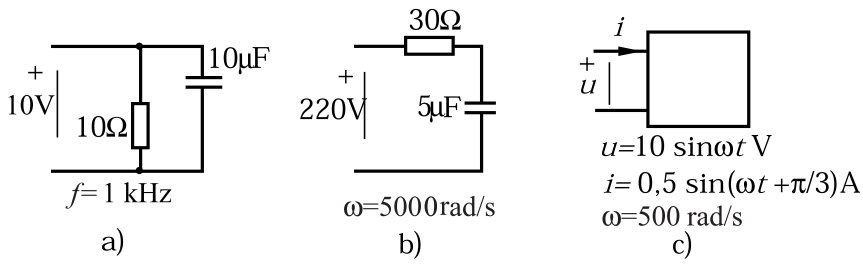
Ex5.13 Bestäm aktiva effekten i tvåpolerna!



Svar: a) $\dfrac{|U|^2}{R}$ b) $\dfrac{|E|^2 R}{(R^2 + \omega^2 L^2)}$ c) $\dfrac{|E|^2}{R}$ d) $\dfrac{2|E|^2}{3R}$

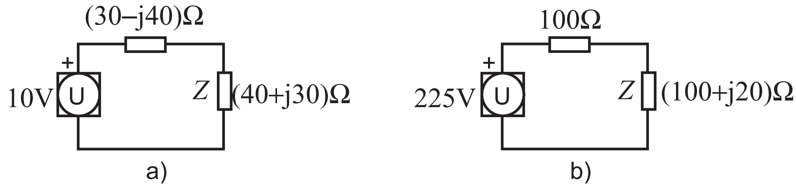
Ex5.14 Bestäm aktiva effekten i tvåpolerna!

L



Svar: a) 10 W b) 580 W c) 1,25 W

Ex5.15 Bestäm aktiva effekten i belastningsimpedansen Z!



Svar: a) $0,8\,\mathrm{W}$ b) $125\,\mathrm{W}$

Ex5.16 En spänningskälla med emken E och inre impedansen $R_\mathrm{i} + \mathrm{j}\,X_\mathrm{i}$ är ansluten till en belastning $R + \mathrm{j}\,X$. **L**

Bestäm

a) komplexa effekten i belastningen,

b) effektfaktorn för belastningen,

c) verkningsgraden (dvs nyttig aktiv effekt i belastningen i förhållande till totalt utvecklad aktiv effekt),

d) största belastningseffekt, då R och X kan väljas godtyckligt.

Svar: a) $\dfrac{|E|^2(R+\mathrm{j}\,X)}{(R+R_\mathrm{i})^2+(X+X_\mathrm{i})^2}$ b) $\dfrac{R}{\sqrt{R^2+X^2}}$ c) $\dfrac{R}{(R+R_\mathrm{i})}$ d) $\dfrac{|E|^2}{4R_\mathrm{i}}$

Ex5.17 En spole med viss induktans och resistansen $100\,\Omega$ är ansluten till en ideal strömgenerator med vinkelfrekvensen 5000 rad/sek. Shuntar man spolen med en kondensator på $1\,\mu\mathrm{F}$, blir den aktiva effekten i spolen maximal. Bestäm förhållandet mellan denna maximala aktiva effekt och den aktiva effekten i det oshuntade fallet!

Svar: 2

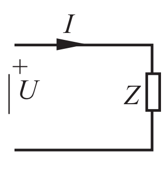
Ex5.18 En generator har emken $300\,\mathrm{V}$ och inre impedansen $(24 - \mathrm{j}\,18)\,\Omega$.
Vilken är den största aktiva effekt, som man kan ta ut ur generatorn, om

a) belastningsimpedansen kan väljas godtyckligt?

b) belastningen är rent resistiv?

Svar: a) $938\,\mathrm{W}$ b) $833\,\mathrm{W}$

Ex5.19 Effektivvärdena för ström och spänning är $10\,\mathrm{A}$ resp. $250\,\mathrm{V}$. Om aktiva effekten är $1250\,\mathrm{W}$, vad har då impedansen Z för värde?



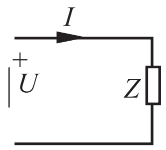
Svar: $Z = 12,5(1 \pm \mathrm{j}\,\sqrt{3})\,\Omega$

Ex5.20 I nätet är $|U| = 10\,\text{V}$, $|I| = 6\,\text{A}$ och $\arg\{Z\} = \pi/4\,\text{rad}$ **L**

a) Bestäm skenbara effekten.

b) Bestäm aktiva effekten.

c) Bestäm effektfaktorn.



Svar: a) $|P_S| = 60\,\text{VA}$ b) $P = 42,4\,\text{W}$ c) $\cos\phi = 1/\sqrt{2}$

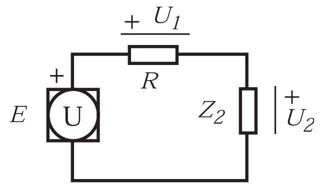
Grafiska metoder

Ex5.21 En emk med effektivvärdet 5 V ansluts till en ideal kondensator i serie med en spole. Spänningen över kondensatorn är 8 V och över spolen 5 V, båda effektivvärden. Bestäm fasvinkeln hos spolens impedans med hjälp av visardiagram.

Svar: 53°

Ex5.22 Beräkna aktiva effekten i den okända impedansen Z_2, då $|E| = 10\,\text{V}$, $|U_1| = 8\,\text{V}$, $|U_2| = 4\,\text{V}$ och $R = 10\,\Omega$.

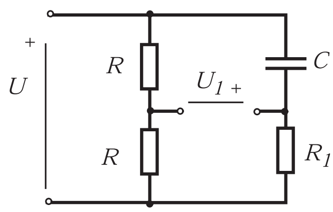
Svar: 1 W



Ex5.23 Använd visardiagram för att bestämma $|U_1/U|$. **L**

Visa också, att fasskillnaden mellan U_1 och U varierar mellan π och 0, om R_1 varierar mellan 0 och ∞.

Svar: $|U_1/U| = 0,5$

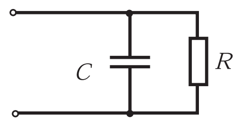


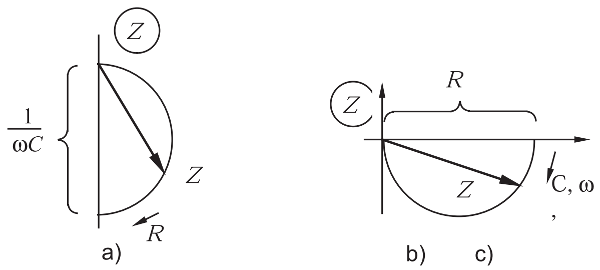
Ex5.24 Bestäm i ett impedansdiagram de värden, som impedansen kan anta, då **L**

a) $0 < R < \infty$, ω och C fixa

b) $0 < C < \infty$, ω och R fixa

c) $0 < \omega < \infty$, C och R fixa .



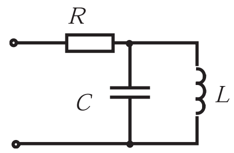


Ex5.25 En spole (R, L) parallellkopplas med en resistor (R_1). Bestäm största värdet på argumentet hos impedansen, då
a) ω varieras.
b) ω hålls konstant och R_1 varieras.

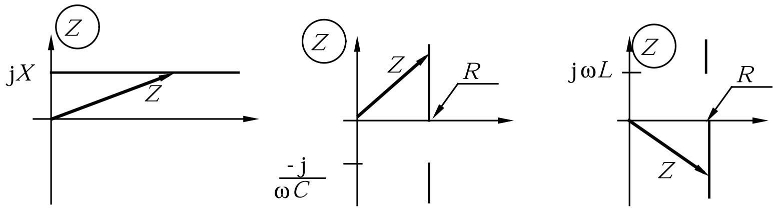
Svar: a) $\arcsin\left(\dfrac{R_1}{2R + R_1}\right)$

b) $\arctan \dfrac{\omega L}{R}$

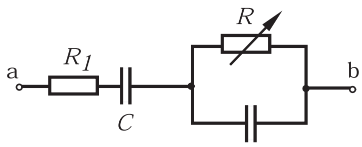
Ex5.26 Rita tre impedansdiagram över totala impedansen där R, L resp. C ökar från 0 till ∞.



Svar:

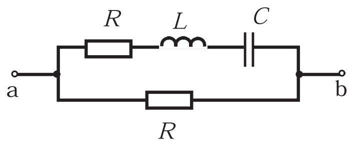


Ex5.27 Bestäm det största värde, som impedansens belopp (dvs. $|Z_{\mathrm{ab}}|$) kan anta, om R kan anta ett godtyckligt positivt resistansvärde. Vinkelfrekvensen är ω.



Svar: $|Z_{\mathrm{tot}}| = \dfrac{1}{2\omega C}[1 + \sqrt{(2\omega C R_1)^2 + 9}]$

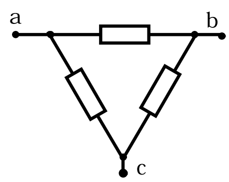
Ex5.28 Impedansen mellan a och b, $Z_{\mathrm{ab}} = |Z_{\mathrm{ab}}|\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi}$, varierar med frekvensen f. Bestäm det största värde, som φ kan anta, då frekvensen kan väljas godtyckligt i intervallet $0 < f < \infty$. **L**



Svar: $\arcsin \dfrac{1}{3} = 19,5^\circ$

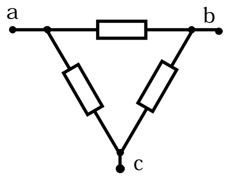
Delta-Y-transformation

Ex5.29 Bestäm Y-ekvivalenten till vidstående D-nät!
$Z_{\mathrm{ab}} = \mathrm{j}\,\Omega\,, \quad Z_{\mathrm{bc}} = Z_{\mathrm{ca}} = -\mathrm{j}\,\Omega\,.$



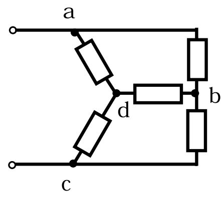
Svar: $Z_{\mathrm{a}} = Z_{\mathrm{b}} = \mathrm{j}\,\Omega = -Z_{\mathrm{c}}$

Ex5.30 Bestäm det till vidstående triangelkopplade nät svarande stjärnkopplade nätet!
$Z_{\mathrm{ab}} = (2+\mathrm{j})\,\Omega\,,\quad Z_{\mathrm{bc}} = -j2\,\Omega\,,$
$Z_{\mathrm{ca}} = (1+j)\,\Omega\,.$



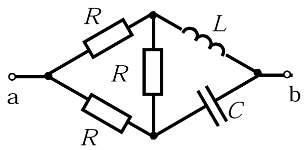
Svar: $\quad Z_{\mathrm{a}} = \dfrac{(1+\mathrm{j}3)}{3}\ \Omega, \quad Z_{\mathrm{b}} = \dfrac{(2-\mathrm{j}4)}{3}\ \Omega, \quad Z_{\mathrm{c}} = \dfrac{(2-\mathrm{j}2)}{3}\ \Omega$

Ex5.31 Bestäm resistansen mellan punkterna a och c genom att först göra en Y-D-transformation av triangelnätet abcd!
$Z_{\mathrm{ad}} = Z_{\mathrm{bd}} = Z_{\mathrm{cd}} = 30\,\Omega\,,\quad Z_{\mathrm{ab}} = Z_{\mathrm{bc}} = 10\,\Omega\,.$



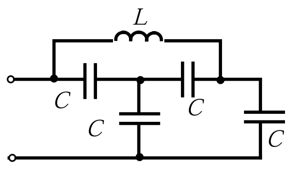
Svar: $\quad R_{\mathrm{ac}} = 15\ \Omega$

Ex5.32 Bestäm kvoten L/C så, att impedansen mellan a och b blir oberoende av frekvensen! Bestäm också detta impedansvärde! **L**



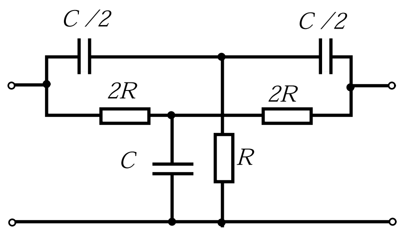
Svar: $\quad \dfrac{L}{C} = \dfrac{R^2}{9} \qquad Z = \dfrac{2R}{3}$

Ex5.33 En impedans Z definieras av vidstående figur. Bestäm de vinkelfrekvenser, för vilka $Z = 0$ och $Z = \infty$. **L**



Svar: $\quad \omega_0 = \sqrt{\dfrac{3}{5LC}}, \qquad \omega_\infty = \sqrt{\dfrac{5}{3LC}}$

Ex5.34 I ett symmetriskt "dubbelt T-nät" enligt figur är det ena polparet anslutet till spänningen U_1, under det att det andra är obelastat. För vilket värde på vinkelfrekvensen ω är utgående spänningen $U_2 = 0$?



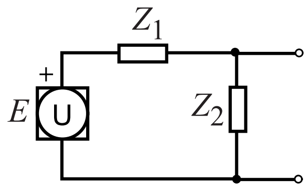
Svar: $\quad \omega = \dfrac{1}{RC}$

Ex5.35 Beräkna polygonsidornas impedans i det polygonnät, som ersätter det stjärnnät med fyra strålar, vars strålimpedanser är $(1+\mathrm{j})\,\Omega\,,\quad (2-2\mathrm{j})\,\Omega\,,\quad (2-2\mathrm{j})\,\Omega$ och $2\,\Omega\,.$

Svar: $\quad Z_{12} = Z_{13} = 6\,\Omega, \quad Z_{14} = (3+\mathrm{j}3)\,\Omega, \quad Z_{23} = -\mathrm{j}12\,\Omega,$
$Z_{24} = Z_{34} = (6-\mathrm{j}6)\,\Omega.$

Anpassning

Ex5.36 Vilken är den största aktiva effekt som kan utvecklas i en belastning som ansluts till detta nät? Hur skall då belastningsimpedansen väljas?
$Z_1 = R(1 + \mathrm{j})$, $Z_2 = R(1 + \mathrm{j}3)$.



Svar: $P_{\max} = \dfrac{5|E|^2}{24R}$ för $Z_{\text{last}} = \dfrac{R(3 - \mathrm{j}4)}{5}$

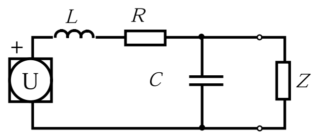
Ex5.37 En generator med okänd inre impedans belastas först med en variabel resistor. Största möjliga effekt i resistorn erhålles, då dess resistans är $100\,\Omega$. Därefter belastas generatorn med en resistor i serie med en kondensator, båda variabla. Inställs dessa så, att maximal effekt erhålls i belastningen, är resistansen $50\,\Omega$. Bestäm ur dessa uppgifter generatorns inre impedans. **L**

Svar: $50(1 + \mathrm{j}\sqrt{3})\,\Omega$

Ex5.38 Till en aktiv tvåpol ansluts en impedans, vars realdel och imaginärdel kan varieras godtyckligt. Den i impedansen utvecklade effekten har sitt största värde, 27 W, när impedansen är $Z = (3,0 + \mathrm{j}4,0)\,\Omega$. Bestäm tvåpolekvivalentens tomgångsspänning och inre impedans.

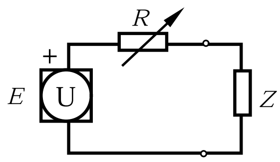
Svar: $U_0 = 18\,\mathrm{V}$, $Z_0 = (3 - 4\mathrm{j})\,\Omega$

Ex5.39 Hur skall Z väljas för att den aktiva effekt som utvecklas i Z skall bli så stor som möjligt?
$L = 5,0\,\mathrm{mH}$, $R = 10\,\Omega$,
$C = 1,0\,\mu\mathrm{F}$, $\omega = 10\,\mathrm{krad/s}$.



Svar: $Z = \dfrac{100}{13}(5 - 12\mathrm{j})\,\Omega$

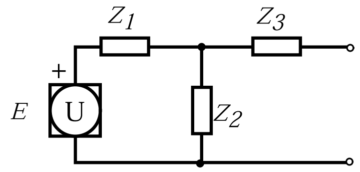
Ex5.40 Bestäm den variabla resistansen R, så att aktiva effekten i Z blir så stor som möjligt. Bestäm denna maximala effekt.
$|E| = 130\,\mathrm{V}$ $Z = (5 + \mathrm{j})\,\Omega$

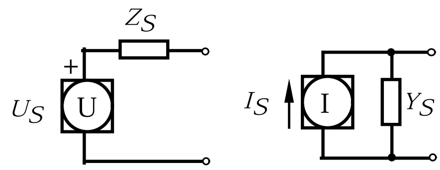


Svar: $3,25\,\mathrm{kW}$

Tvåpolekvivalenter

Ex5.41 **a)** Bestäm tomgångsspänningen, U_0, för detta nät.
b) Bestäm kortslutningsströmmen I_k.
c) Nätet är ekvivalent med vidstående nät som har samma tomgångsspänning och kortslutningsström. Bestäm U_S och Z_S.
d) Nätet kan också ersättas med en strömgenerator parallellt med en admittans.
Bestäm I_S och Y_S.

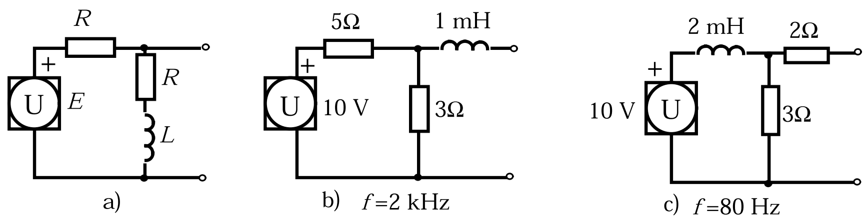




Svar: a) $U_0 = \dfrac{Z_2 E}{Z_1 + Z_2}$ b) $I_k = \dfrac{Z_2 E}{Z_1 Z_2 + Z_1 Z_3 + Z_2 Z_3}$

c) $U_S = U_0 \quad Z_S = \dfrac{U_0}{I_k}$ d) $I_S = I_k \quad Y_S = \dfrac{I_k}{U_0}$

Ex5.42 Bestäm tomgångsspänning och inre impedans för de avbildade aktiva tvåpolerna. Rita också upp Thévenin- och Nortonekvivalenterna.

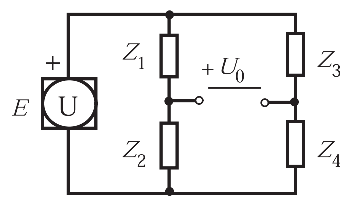


Svar: a) $U_0 = E\dfrac{R + j\omega L}{2R + j\omega L}$ $Z_0 = R\dfrac{R + j\omega L}{2R + j\omega L}$

b) $U_0 = 3,75\,\mathrm{V}$ $Z_0 = (1,9 + j12,6)\,\Omega$

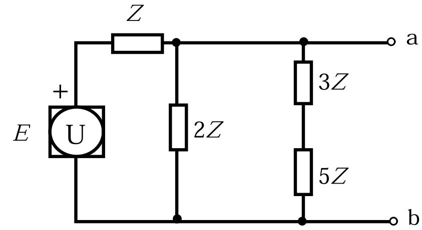
c) $U_0 = (9 - j3)\,\mathrm{V}$ $Z_0 = (2,3 + j0,9)\,\Omega$

Ex5.43 **a)** Bestäm spänningen U_0 med E som riktfas! **L**
b) För ett visst samband mellan Z_1 , Z_2 , Z_3 och Z_4 blir $U_0 = 0$. Bestäm detta samband!



Svar: a) $U_0 = E\dfrac{(Z_2 Z_3 - Z_1 Z_4)}{(Z_1 + Z_2)(Z_3 + Z_4)}$ b) $\dfrac{Z_1}{Z_2} = \dfrac{Z_3}{Z_4}$

Ex5.44 **a)** Bestäm spänningen över impedansen $5\,Z$.
b) Bestäm tvåpolekvivalenten med avseende på ab.

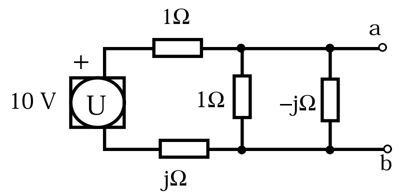


Svar: a) $\dfrac{5E}{13}$

b) $U_0 = \dfrac{8E}{13}, \quad I_\mathrm{k} = \dfrac{E}{Z}$

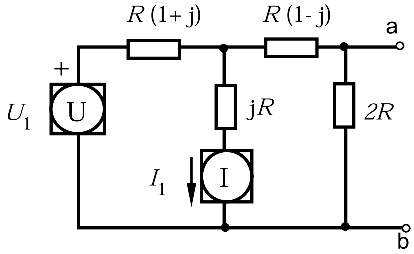
Ex5.45 Bestäm tvåpolekvivalenten med avseende på ab.

Svar: $I_0 = (5 - \mathrm{j}5)\,\mathrm{A} \quad Z_0 = (0,6 - \mathrm{j}0,2)\,\Omega$



Ex5.46 Bestäm tvåpolekvivalenten med avseende på ab.

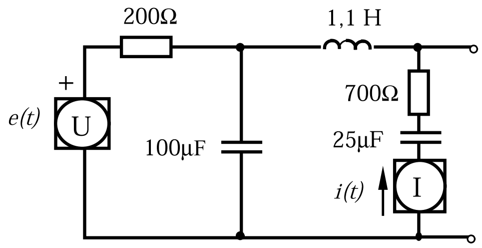
Svar: $I_0 = \dfrac{U_1}{2R} - \dfrac{I_1}{2}(1+\mathrm{j}) \qquad Z_0 = R$



Ex5.47 Bestäm tvåpolekvivalenten till vidstående nät, då $e(t) = 100\sqrt{2}\cos\omega\, t\,\mathrm{V}$ och $i(t) = 2\cos(\omega\, t - \pi/4)\,\mathrm{A}$. $\omega = 100\,\mathrm{rad/s}$

Svar: $u_0 = 146\cos(\omega t - \arctan(\tfrac{5}{9}))\,\mathrm{V}$

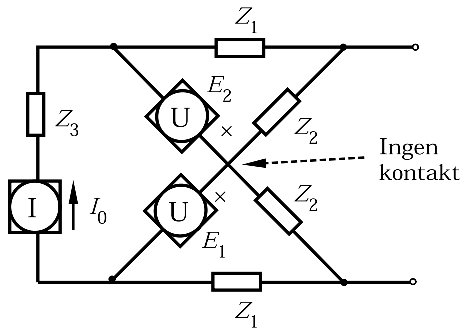
$Z_\mathrm{i} = (40 + \mathrm{j}30)\,\Omega$



Ex5.48 Bestäm tvåpolekvivalenten till vidstående nät.

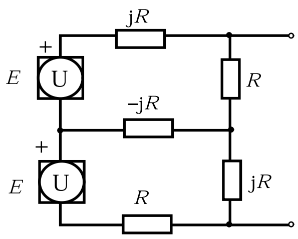
Svar: $U_0 = \dfrac{I_0(Z_2 - Z_1) + (E_1 - E_2)}{2}$

$Z_i = \dfrac{(Z_1 + Z_2)}{2}$

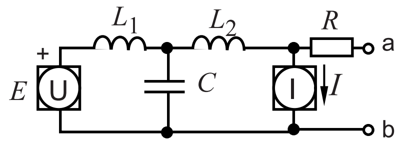


Ex5.49 Bestäm tvåpolekvivalenten till vidstående krets, där de båda emkerna är lika till fas och amplitud.

Svar: $U_0 = E, \quad Z_i = \mathrm{j}R$



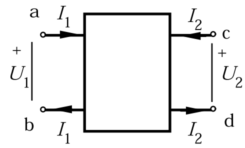
Ex5.50 Bestäm tomgångsspänningen U_{ab} vid den frekvens $\neq 0$, där den ekvivalenta tvåpolens inre impedans Z_{ab} är rent reell!
Svaret får ej innehålla ω eller f.



Svar: $-E\dfrac{L_2}{L_1}$

Tvåporten

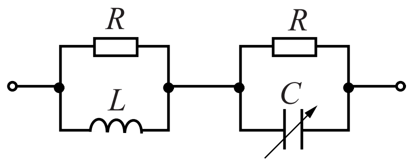
Ex5.51 För en passiv och linjär fyrpol gäller följande samband: **L**
$U_1 = 6I_1 + (3 - \mathrm{j}3)I_2$
$U_2 = (3 - \mathrm{j}3)I_1 + (3 + \mathrm{j})I_2$
a) Angiv fyrpolens ekvivalenta T-schema.
b) Man ansluter en växelspänning med effektivvärdet 2 V till ab och en variabel resistans till cd. Hur stor är den maximalt uttagbara aktiva effekten i resistansen?



Svar: $Z_1 = (3 + \mathrm{j}3)\,\Omega \quad Z_{12} = (3 - \mathrm{j}3)\,\Omega \quad Z_2 = \mathrm{j}4\,\Omega \quad P = \frac{1}{8}\,\mathrm{W}$

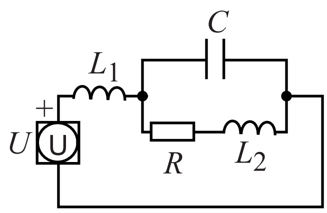
Frekvensoberoende nät

Ex5.52 Vidstående nät kan bli resistivt för alla frekvenser vid ett visst val av C.
Bestäm detta C-värde samt tvåpolens totala resistans!



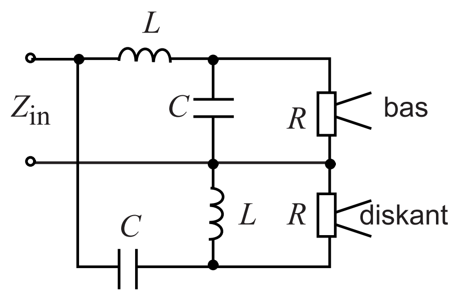
Svar: $C = \dfrac{L}{R^2}, \qquad Z = R$

Ex5.53 Visa, att spänningen över resistansen R är oberoende av induktansen L_2 vid en viss vinkelfrekvens! **L**



Svar: $\dfrac{U_R}{U} = -\mathrm{j}R\sqrt{\dfrac{C}{L_1}}$ ober. av L_2
för $\omega = \dfrac{1}{\sqrt{L_1 C}}$

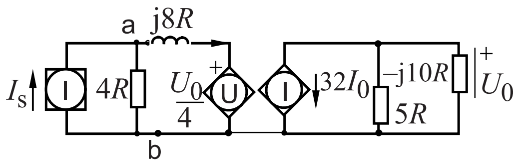
Ex5.54 En bas- och en diskanthögtalare på vardera R ohm inkopplas till ett delningsfilter enligt figur. Bestäm ett samband mellan R, L och C så att inimpedansen Z_{in} blir rent reell för alla frekvenser! **L**



Svar: $Z_{\text{in}} = R$ om $2R^2C = L$

Beroende generatorer

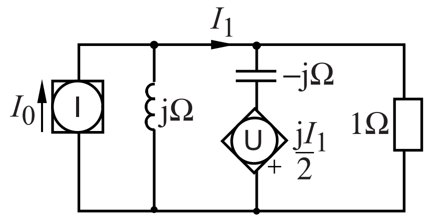
Ex5.55 Använd nodanalys för att bestämma I_0 och den ekvivalenta impedansen, sedd från ab (åt höger)!



Svar: $I_0 = \frac{I_S}{85}(-7 - \text{j}6)$

$Z_{ekv} = (-32 + \text{j}24)R$

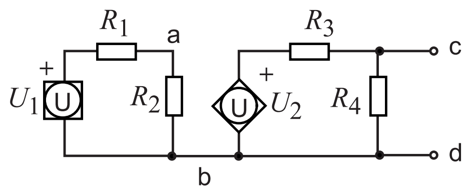
Ex5.56 Använd nodanalys för att bestämma komplexa spänningen över strömgeneratorn, då $I_0 = 2\,\text{A}$. (Välj I_0 till riktfas!)



Svar: Spänningen är $2,7\,e^{\text{j}0,46}\,\text{V}$

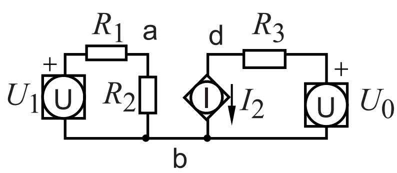
Ex5.57 Generatorn (2) har en emk, som beror av spänningen mellan ab enligt formeln $U_2 = kU_{\text{ab}}$. Bestäm U_{cd} uttryckt i **L**

U_1, k, R_1, R_2, R_3 och R_4.



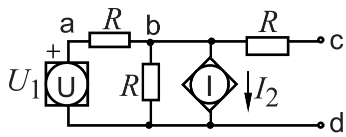
Svar: $U_{\text{cd}} = k \cdot U_1 \frac{R_2}{(R_1 + R_2)} \cdot \frac{R_4}{(R_3 + R_4)}$

Ex5.58 Strömgeneratorns ström beror av spänningen mellan a och b enligt: $I_2 = g_{\text{m}}U_{\text{ab}}$, där g_{m} är en konstant. Bestäm spänningen över strömgeneratorn, dvs U_{db}.



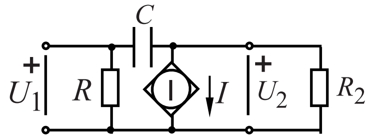
Svar: $U_{\text{db}} = U_0 - g_{\text{m}}U_1 \frac{R_3R_2}{(R_1 + R_2)}$

Ex5.59 Bestäm tvåpolekvivalenten med avseende på cd, då den <u>beroende</u> strömgeneratorns ström bestäms av spänningen mellan a och b enligt $I_2 = g_\mathrm{m} U_\mathrm{ab}$. **L**



Svar: $U_0 = U_1 \dfrac{(1 - g_\mathrm{m}R)}{(2 - g_\mathrm{m}R)} \qquad R_0 = R\dfrac{(3 - g_\mathrm{m}R)}{(2 - g_\mathrm{m}R)}$

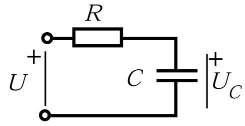
Ex5.60 Bestäm förstärkningen U_2/U_1 i vidstående koppling, där strömgeneratorn är en beroende generator med strömmen $I = g_\mathrm{m} U_1$



Svar: $\dfrac{U_2}{U_1} = \dfrac{\mathrm{j}\omega C R_2 - g_\mathrm{m} R_2}{1 + \mathrm{j}\omega C R_2}$

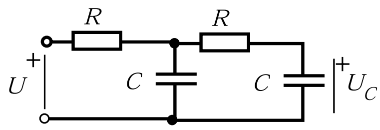
Filterkretsar

Ex5.61 En enkel RC-länk har $R = 2,0\,\mathrm{k}\Omega$ och $C = 1,0\,\mu\mathrm{F}$.
Bestäm
a) gränsfrekvensen f_g
b) fasvinkeln φ mellan U_C och U vid f_g



Svar: a) $f_\mathrm{g} = 80\,\mathrm{Hz}$ b) $\varphi = \pi/4\,\mathrm{rad}$

Ex5.62 Två kaskadkopplade RC-länkar har $R = 2,0\,\mathrm{k}\Omega$ och $C = 1,0\,\mu\mathrm{F}$.
Bestäm gränsfrekvensen f_g!
Skissera frekvenskurvan och jämför med motsvarande för den enkla RC-länken.



Svar: $f_\mathrm{g} = 30\,\mathrm{Hz}$

Ex5.63 En serieresonanskrets har resistansen $10\,\Omega$, Q-värdet 5 och resonansfrekvensen 1 MHz. Bestäm kretsens bandbredd! **L**

Svar: 200 kHz

Ex5.64 En serieresonanskrets har resonansfrekvensen 100 kHz och bandbredden 10 kHz. Bestäm förhållandet mellan effektivvärdena av spänningen över kondensatorn och spänningen över resistorn vid resonans.

Svar: 10

Ex5.65 En serieresonanskrets har resonansvinkelfrekvensen ω_0 och Q-värdet Q. Kondensatorn i kretsen har kapacitansen C. Bestäm resistansen och induktansen i kretsen. **L**

Svar: $L = \dfrac{1}{\omega_0^2 C} \qquad R = \dfrac{1}{\omega_0 C Q}$

Ex5.66 En serieresonanskrets med resonansfrekvensen 1000 kHz och Q-värdet 3,00 matas från en emk (E, ω).

a) Bestäm kondensatorspänningen vid resonans.

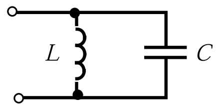
b) För vilken frekvens blir spänningen över kondensatorn maximal och hur stor blir den då kapacitansen är 100 nF?

Svar: $3,00E$, $0,97\,\text{MHz}$ resp. $3,04E$

Ex5.67 En seriesvängningskrets matas med en växelspänning med konstant effektivvärde. Vid kretsens resonansfrekvens, som är f_0, är Q-värdet Q_0. Bestäm bredden hos det frekvensområde, där effektivvärdet av strömmen är större än $0,5$ gånger effektivvärdets största värde. **L**

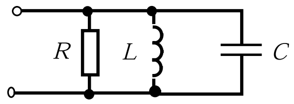
Svar: $\Delta f = \sqrt{3}\dfrac{f_0}{Q_0}$

Ex5.68 Bestäm inimpedansen som funktion av frekvensen för den ideala parallellsvängningskretsen enligt figuren.



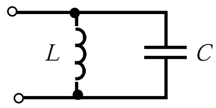
Svar: $\dfrac{\mathrm{j}\,\omega L}{1-\omega^2 LC}$

Ex5.69 Bestäm kretsens resonansfrekvens! $R = 100\,\Omega$, $L = 1,0\,\text{mH}$, $C = 2,0\,\mu\text{F}$!



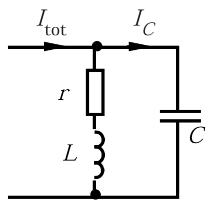
Svar: 3,56 kHz

Ex5.70 I en ideal parallellsvängningskrets är Q-värdet 10 och kondensatorn har värdet 100 pF. Resonansfrekvensen är 100 kHz. Bestäm spolens induktans och parallellresistans.



Svar: $L = 25\,\text{mH}$ $R = 0,16\,\text{M}\Omega$

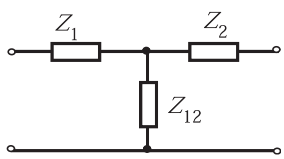
Ex5.71 I en parallellsvängningskrets är effektivvärdet av strömmen i vardera grenen större än totalströmmen. Bestäm kvoten $|I_C/I_{\text{tot}}|$ för $\omega = \omega_0 = 1/\sqrt{LC}$ och $Q = \omega_0 L/r = 10$. **L**



Svar: $\sqrt{Q^2+1} \approx 10$

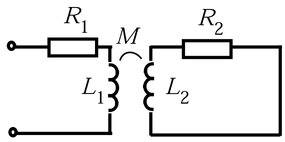
Induktiv koppling

Ex5.72 Två induktivt kopplade spolar (R_1, L_1, R_2, L_2, M) kan representeras av ett ekvivalent schema enligt figuren. Bestäm Z_1, Z_{12} och Z_2! **L**



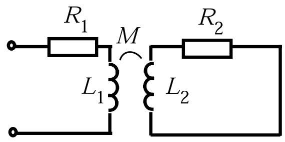
Svar: $Z_1 = R_1 + \mathrm{j}\,\omega(L_1 - M)$, $Z_{12} = \mathrm{j}\,\omega M$, $Z_2 = R_2 + \mathrm{j}\,\omega(L_2 - M)$

Ex5.73 En ideal strömgenerator (I_0, ω) är ansluten till en lufttransformator enligt figur.
Bestäm spänningen över R_2!



Svar: $\pm \dfrac{\mathrm{j}\,\omega M R_2 I_0}{(R_2 + \mathrm{j}\,\omega L_2)}$

Ex5.74 En strömgenerator (I_0, ω) med inre impedansen Z_0 är ansluten till en lufttransformator enligt figur. Bestäm spänningen över R_2! **L**
Ledning: Ersätt strömgeneratorn med en ekvivalent spänningsgenerator.



Svar: $U_{R2} = \pm \mathrm{j}\,\omega M R_2 Z_0 \dfrac{I_0}{(Z_1 Z_2 + \omega^2 M^2)}$
där $Z_1 = Z_0 + R_1 + \mathrm{j}\,\omega L_1, \quad Z_2 = R_2 + \mathrm{j}\,\omega L_2$

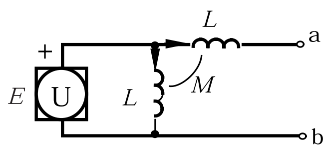
Ex5.75 Två lika spolar (r, L) är fast kopplade till varandra. Om till den ena spolen kopplas en förlustfri kondensator kan impedansen, mätt över den andra spolen, bli rent resistiv. Bestäm kapacitansen, då vinkelfrekvensen är ω!

Svar: $C = \dfrac{L}{2R^2} \pm \sqrt{(\dfrac{L}{2R^2})^2 - \dfrac{1}{(\omega R)^2}}$

Ex5.76 En kondensator med kapacitansen C ansluts till sekundärsidan på en förlustfri lufttransformator (L_1, L_2, M). Vid vilken frekvens är beloppet av impedansen på primärsidan oändligt?

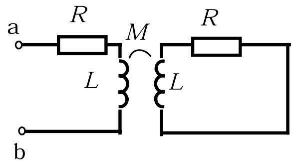
Svar: $\dfrac{1}{2\pi\sqrt{L_2 C}}$

Ex5.77 Bestäm tvåpolekvivalenten med avseende på ab. **L**
Induktanserna är kopplade, så att flödena samverkar $(M = |M|)$.



Svar: $U_0 = E(1 - \dfrac{M}{L}) \quad Z_0 = \mathrm{j}\,\omega L(1 - \dfrac{M^2}{L^2})$

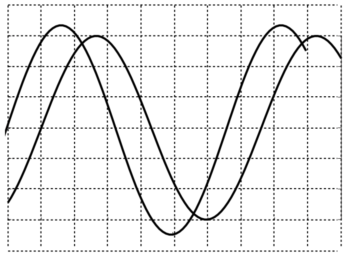
Ex5.78 Två identiska spolar, med $Q = 100$ vardera, kopplas till varandra så att beloppet av ömsesidiga induktansen mellan spolarna blir 25 % av spolarnas egeninduktans. Om sekundärspolen kortslutes, erhålles, sett från polparet ab, en ekvivalent spole. Bestäm denna ekvivalenta spoles Q-värde.
Ledning: $Q >> 1$.



Svar: 88

Mättillämpningar

Ex6.1 Effektutvecklingen i en induktiv tvåpol skulle bestämmas med ett oscilloskop. Spänningen över tvåpolen anslöts till kanal A via en 20dB-prob, och strömmen genom tvåpolen anslöts till kanal B via en strömprob med känsligheten 1 mA/mV
Man erhöll då ett oscillogram enligt figuren med tidbasen inställd på 0,2 ms/DIV, kanal A på 5 V/DIV och kanal B på 0,2 V/DIV **L**



Bestäm ur oscillogrammet strömamplituden, fasförskjutningen mellan ström och spänning samt aktiva effektutvecklingen i tvåpolen!

Svar: $\hat{I} = 0,6\,\mathrm{A}$, $\varphi = 0,94\,\mathrm{rad}$, $P = 31\,\mathrm{W}$

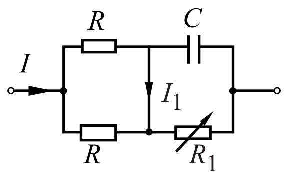
Ex6.2 En prob med dämpningen 20 dB är avsedd för ett oscilloskop med ingången 1 MΩ , 27 pF. Den används av misstag utan omjustering på ett oscilloskop med ingången 1 MΩ , 33 pF. **L**

Hur stort procentuellt fel får man vid en mätning av en sinusspänning
a) vid $1,0\,\mathrm{kHz}$?
b) vid 100 kHz?

Svar: a) 1% b) 17%

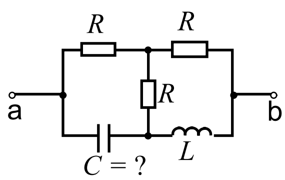
Blandade övningsexempel

Ex7.1 Bestäm $|I_1/I|$ som funktion av R_1 för $0 < R_1 < \infty$!
Bestäm också fasvinkeln hos I_1 (med I som riktfas) för $0 < R_1 < \infty$!
Vinkelfrekvensen är ω . **L**



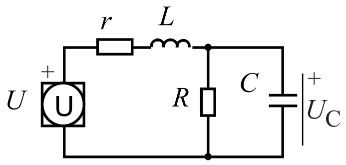
Svar: $|I_1/I| = 0,5$ $\arg I_1 = -2\arctan \omega C R_1$

Ex7.2 Impedansen mellan a och b kan göras oberoende av frekvensen för ett visst värde på C.
Bestäm detta värde på C och det tillhörande värdet på impedansen!



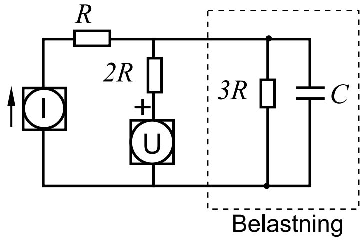
Svar: $C = \dfrac{L}{9R^2}$ $Z = \dfrac{3R}{2}$

Ex7.3 Bestäm den vinkelfrekvens, vid vilken $|\frac{U_C}{U}|$ har sitt största värde!



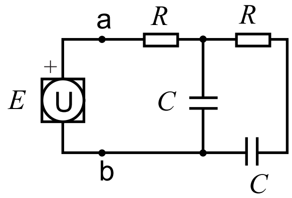
Svar: $\omega = \sqrt{\frac{1}{LC}} \cdot \sqrt{1 - \frac{r}{2R}\left(\frac{L}{CRr} + \frac{CRr}{L}\right)}$

Ex7.4 Bestäm aktiva effektutvecklingen i belastningen, då spänningskällan har källspänningen $\hat{U}\ \cos(\omega t + \varphi)$ och strömgeneratorn levererar strömmen $\hat{I}\ \cos\omega t$ **L**



Svar: $P = 3 \cdot \frac{\hat{U}^2 + 4R^2\hat{I}^2 + 4R\hat{I}\hat{U}\ \cos\varphi}{2R\,[25 + 36(\omega CR)^2]}$

Ex7.5 Beräkna den i nätet till höger om ab totalt utvecklade aktiva effekten!



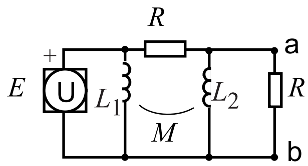
Svar: $P = \frac{E^2}{R} \cdot \frac{5x^2 + x^4}{1 + 7x^2 + x^4}$,

där $x = \omega CR$

Ex7.6 Två spolar har induktanserna $L_1 = 64\,\text{mH}$ resp $L_2 = 1,0\,\text{mH}$, och mellan dem är ömsesidiga induktansens belopp $M = 6,4\,\text{mH}$. **L**
Spolarnas lindningsresistanser är försumbara vid den använda frekvensen 100 kHz. Spole nr 1 ansluts via en kondensator till en växelspänningsgenerator med källspänningen $U_s = 100\,\text{mV}$ och inre impedansen $Z_s = (10 + \text{j}0,0)\,\Omega$. Den andra spolen kortslutes.
För vilket värde på kapacitansen blir strömmen genom den kortslutna spolen maximal? Hur stort är strömmens maximivärde?

Svar: $C = 110\,\text{pF}$ $\quad |I_2|_{\max} = 64\,\text{mA}$

Ex7.7 Bestäm komplexa spänningen mellan a och b uttryckt i E , R, L_1, L_2, M och ω!

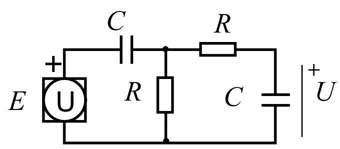


Svar: $U_{\text{ab}} = E \cdot \frac{MR + \text{j}\omega(L_1L_2 - M^2)}{L_1R + \text{j}\omega(L_1L_2 - M^2)}$

Ex7.8 Uttrycket på U/E går att skriva på formen **L**

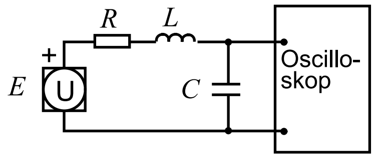
$$\frac{U}{E} = \frac{1}{a[1 + \text{j}b(\omega/\omega_0 - \omega_0/\omega)]}$$

Visa detta och bestäm härur bandbredden uttryckt i R och C!
Bandbredden definieras som det frekvensintervall, där $|U/E| \geq (1/\sqrt{2}) \cdot |U/E|_{\max}$



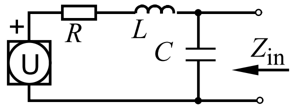
Svar: $\Delta f = \frac{3}{2\pi RC}$

Ex7.9 Oscilloskopspänningen i vidstående koppling blir maximalt 40 mV, och detta inträffar vid vinkelfrekvensen 10 Mrad/s.
Bestäm den vinkelfrekvens, för vilken kretsen är i resonans, då oscilloskopet är bortkopplat!
Oscilloskopet med anslutningskabel kan denna gång representeras med en ideal kondensator med kapacitansen 150 pF.
$|E| = 1,0\,\mathrm{mV}$, $R = 10\,\Omega$.



Svar: 16 Mrad/s

Ex7.10 Beräkna inimpedansen över kondensatorn vid resonans!
Z_{in} skall uttryckas i Q , ω_0 och C .
Man får förutsätta, att $Q \gg 1$.

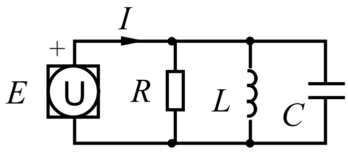


Svar: $Z_{\mathrm{in}} = \dfrac{Q}{\omega_0 C}$

Ex7.11 En serieresonanskrets med godhetstalet Q_0 ansluts till en emk med källspänningen E_0 . **L**
Den är avstämd till resonans, varvid strömmen är I_r .
Beräkna den största aktiva effekt, som man kan få i en varierbar belastning, ansluten parallellt med kondensatorn!
Beräkna också hur belastningsimpedansen skall väljas!
Q_0 får <u>inte</u> anses vara mycket större än 1.

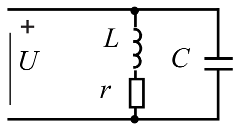
Svar: $P_{\mathrm{max}} = \dfrac{E_0 I_r}{4}$ $\quad Z_{\mathrm{bel}} = \dfrac{E_0}{I_r}\,(Q_0^2 + \mathrm{j}Q_0)$

Ex7.12 I den avbildade idealiserade parallellkretsen är $|I| = I_0$ **L**
vid resonansfrekvensen $f_0 = \dfrac{1}{2\pi\sqrt{LC}} = 100\,\mathrm{kHz}$.
Beräkna kretsens bandbredd, om $|I| = 8I_0$ vid frekvensen $2f_0$!

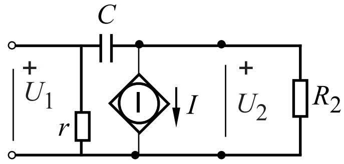


Svar: $\Delta f = 18,9\,\mathrm{kHz}$

Ex7.13 En parallellkrets enligt figuren har stort $Q-$värde. **L**
Visa att förlusteffekten vid resonans är $\dfrac{|U|^2}{rQ^2}$!



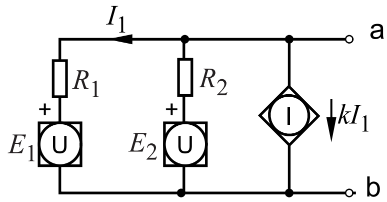
Ex7.14 Bestäm förstärkningen U_2/U_1 i vidstående koppling, där strömgeneratorn är en beroende generator med strömmen $I = g_m U_1$



Svar: $\dfrac{U_2}{U_1} = \dfrac{\mathrm{j}\omega C R_2 - g_m R_2}{1 + \mathrm{j}\omega C R_2}$

Ex7.15 Kopplingen består av två oberoende spänningskällor med källspänningarna E_1 och E_2 samt resistanserna R_1 och R_2. Vidare finns en beroende strömgenerator, vars ström är kI_1. **L**

Bestäm tvåpolekvivalenten med avseende på polparet ab!



Svar: $U_0 = \dfrac{R_2(1+k)E_1 + R_1 E_2}{R_1 + R_2(1+k)}$

$Z_0 = \dfrac{R_1 R_2}{R_1 + R_2(1+k)}$

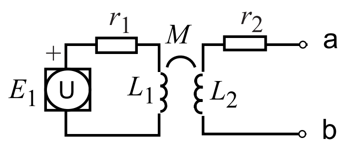
Ex7.16 Spänningen $u(t) = 130\cos(2000t + \pi/6)$ V ansluts till en spole med resistansen $r = 10\,\Omega$ och induktansen $L = 12\,\mathrm{mH}$. **L**

Hur stor är aktiva aktiva effekten i spolen?.

Svar: $P = 125\,\mathrm{W}$

Ex7.17 Beräkna 2-polekvivalenten med avseende på polparet ab. **L**

Vinkelfrekvensen är ω.



Svar: $U_0 = \dfrac{\mathrm{j}\omega M E_1}{r_1 + \mathrm{j}\omega L_1}$

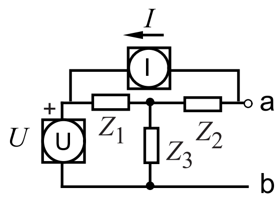
$$Z_0 = r_2 + \frac{\omega^2 M^2 r_1}{r_1^2 + \omega^2 L_1^2} + \mathrm{j}\omega\left[L_2 - \frac{\omega^2 M^2 L_1}{r_1^2 + \omega^2 L_1^2}\right]$$

Ex7.18 Vilken är den maximala aktiva effekt, som man kan få ut i en valfri impedans, ansluten till ab? **L**

$Z_1 = (1 - \mathrm{j})\,\mathrm{k}\Omega \quad Z_2 = \dfrac{2 + \mathrm{j}5}{3}\,\mathrm{k}\Omega$

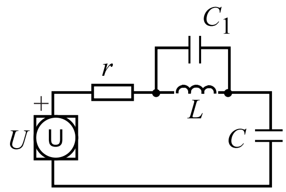
$Z_3 = (2 + \mathrm{j}4)\,\mathrm{k}\Omega$

$I = (2 - \mathrm{j}3)\,\mathrm{mA} \quad U = 9\,\mathrm{V}$



Svar: $P_{\max} = 6,6\,\mathrm{mW}$

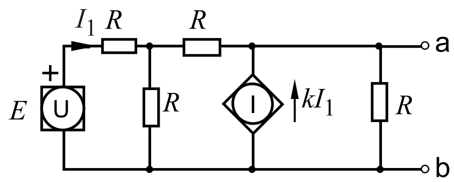
Ex7.19 a) Bestäm den vinkelfrekvens ω_r, för vilken kretsen blir rent resistiv!
b) Hur stor blir spänningen över C vid denna vinkelfrekvens?



Svar: a) $\omega_r = \dfrac{1}{\sqrt{L(C+C_1)}}$

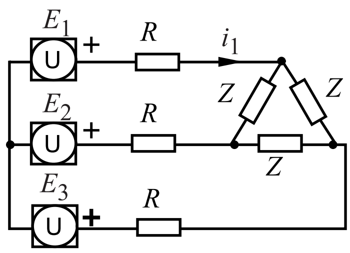
b) $U_C = -\mathrm{j}\,\dfrac{U}{r}\sqrt{\dfrac{L}{C}\,(1+\dfrac{C_1}{C})}$

Ex7.20 Bestäm tvåpolekvivalenten med avseende på ab! Strömgeneratorn är en beroende generator, vars ström är kI_1, där I_1 är strömmen genom spänningskällan. **L**



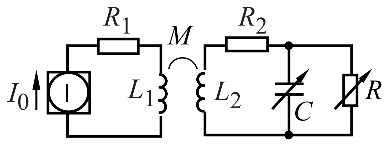
Svar: $U_0 = E\,\dfrac{2k+1}{k+5}$ $\quad R_0 = \dfrac{3R}{k+5}$

Ex7.21 Det avbildade nätet representerar ett symmetriskt trefasnät med fasspänningen i fas 1 $e_1(t) = \hat{E}\,\cos(\omega t)$, i fas 2 $e_2(t) = \hat{E}\,\cos(\omega t - 2\pi/3)$ och i fas 3 $e_3(t) = \hat{E}\,\cos(\omega t + 2\pi/3)$
Beräkna tidsuttrycket för strömmen i_1, då $Z = R + \mathrm{j}\omega L$



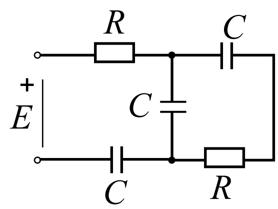
Svar: $i_1(t) = \dfrac{3\hat{E}}{\sqrt{16R^2 + \omega^2 L^2}}\,\cos(\omega t - \arctan\dfrac{\omega L}{4R})$

Ex7.22 Välj R och C så att maximal aktiv effekt erhålls i R!
Bestäm också denna maximala effekt!
Vinkelfrekvensen är ω. **L**



Svar: $R = \dfrac{R_2^2 + \omega^2 L_2^2}{R_2}$ $\quad C = \dfrac{L_2}{R_2^2 + \omega^2 L_2^2}$ $\quad P_{\max} = \dfrac{\omega^2 M^2}{4R_2}\,|I_0|^2$

Ex7.23 Bestäm den totala aktiva effekt, som utvecklas i nätet! **L**
$R = 1{,}0\,\mathrm{k\Omega}$, $C = 1{,}0\,\mu\mathrm{F}$,
$|E| = 200\,\mathrm{V}$, $\omega = 1000\,\mathrm{rad/s}$,



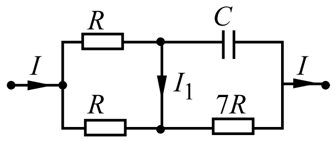
Svar: $P_{\mathrm{tot}} = 12\,\mathrm{W}$

Ex7.24 En kondensator, som inte är ideal, kan representeras av en kapacitans på $0,10\,\mu\text{F}$ parallellkopplad med en resistor på $1,0\,\text{M}\Omega$. **L**
Denna kondensator ansluts vid $t = 0$ till en likspänningskälla med källspänningen $12\,\text{V}$ i serie med en resistans på $200\,\text{k}\Omega$.

Beräkna spänningen över kondensatorn som funktion av tiden, då kondensatorn är oladdad för $t < 0$!

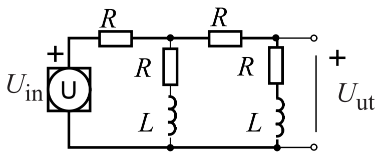
Svar: $u_C(t) = 10\,(1 - e^{-60t})\,\text{V}$

Ex7.25 Bestäm belopp och fasvinkel för I_1 uttryckta i I, R, C och frekvensen f! **L**
I är riktfas (reell).



Svar: $I_1 = \frac{1}{2}\,I$ (ober av f); $\arg\{I_1\} = -2\arctan(14\pi f RC)$

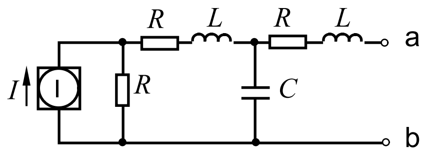
Ex7.26 Bestäm gränsfrekvensen för nätet, dvs det värde på frekvensen, där $|U_{\text{ut}}/U_{\text{in}}|$ är $1/\sqrt{2}$ av sitt maximala värde!

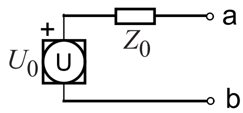


Svar: $$f_g = \frac{R}{2\pi L}\sqrt{\frac{11+\sqrt{213}}{2}}$$

Ex7.27 Beräkna $|U_0|$ och $\arg\{U_0\}$ samt Z_0 för den ekvivalenta tvåpolen!

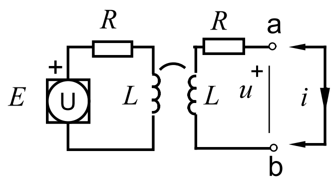
$|I| = 30\,\text{mA}$, $\arg\{I\} = 0,50\,\text{rad}$,
$\omega = 0,10\,\text{Mrad/s}$, $R = 50\,\Omega$,
$L = 1,0\,\text{mH}$, $C = 0,20\,\mu\text{F}$





Svar: $U_0 = 0,67\,\text{V}$, $\arg\{U_0\} = -1,5\,\text{rad}$, $Z_0 = (70 + \text{j}40)\,\Omega$

Ex7.28 Två likadana spolar (R, L) är uppställda i närheten av varandra. Den ena spolen ansluts till en emk med effektivvärdet $10,0\,\text{V}$. Man mäter spänningen mellan a och b (se figuren) och finner att den är **L**



$u(t) = 0,45\,\cos(\omega t + 0,46)\,\text{V}$

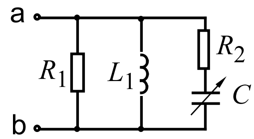
Kortsluter man ab, blir strömmen genom kortslutningen

$i(t) = 20\,\cos(\omega t - 0,65)\,\text{mA}$.

Bestäm härur spolarnas resistans och induktans samt kopplingsfaktorn k som kan förutsättas vara mycket mindre än 1!
Frekvensen är $5,0\,\text{kHz}$.

Svar: $R = 10\,\Omega$, $L = 0,64\,\text{mH}$, $k = 0,035$

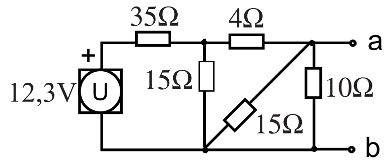
Ex7.29 a) Rita upp ortsdiagrammet för Y_{ab}, då C kan varieras godtyckligt!
b) Bestäm ur det i a) erhållna diagrammet det största värde, som $|Z_{\mathrm{ab}}|$ kan anta!



$\omega = 1,0\,\mathrm{Mrad/s}$, $L_1 = 25\,\mu\mathrm{H}$,
$R_1 = 100\,\Omega$, $R_2 = 25\,\Omega$

Svar: $|Z_{\mathrm{ab}}|_{\mathrm{max}} = 33\,\Omega$

Ex7.30 Beräkna tvåpolekvivalenten med avseende på polparet ab!

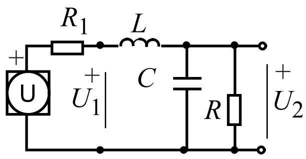


Svar: $U_{\mathrm{ab}} = 1,1\,\mathrm{V}$ $Z_{\mathrm{ab}} = R_{\mathrm{ab}} = 4,2\,\Omega$

Ex7.31 Två likadana spolar med resistansen $2\,\Omega$ och induktansen $2\,\mathrm{mH}$ placeras i varandras närhet. De båda spolarna parallellkopplas och ansluts till en emk med $\omega = 1000\,\mathrm{rad/s}$. Om anslutningstrådarna till ena spolen skiftas, så ökar generatorströmmens effektivvärde med faktorn $\sqrt{2}$.
Beräkna kopplingsfaktorn k mellan spolarna! $k = |M/L|$ **L**

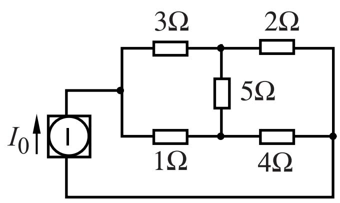
Svar: $k = 0,35$

Ex7.32 Bestäm kvoten $\dfrac{U_1}{U_2}$ i det avbildade nätet!



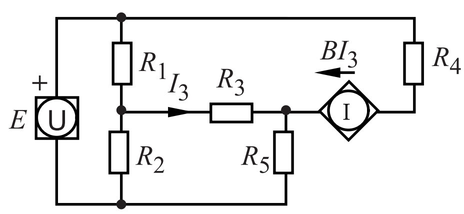
Svar: $\dfrac{U_1}{U_2} = 1 - \omega^2 LC + \mathrm{j}\,\dfrac{\omega L}{R}$

Ex7.33 Hur många procent av generatorströmmen I_0 går genom 5-ohmsresistorn? **L**



Svar: 14 %

Ex7.34 Bestäm spänningen över resistansen R_5 i denna krets, där strömgeneratorn är en beroende generator, vars ström bestäms av I_3! **L**
$E = 12\,\mathrm{V}$, $R_1 = 3000\,\Omega$, $R_2 = 1000\,\Omega$,
$R_3 = 1000\,\Omega$, $R_4 = 2000\,\Omega$, $R_5 = 100\,\Omega$, $B = 24$.



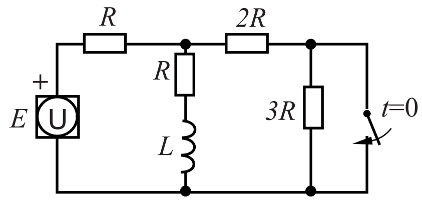
Svar: $1,8\,\mathrm{V}$

Ex7.35 Omkopplaren slås till vid $t = 0$, då stationärt tillstånd råder i kretsen. **L**

Emken E är en likspänning.

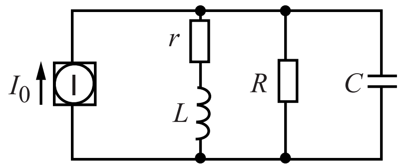
Bestäm strömmen genom spolen som funktion av tiden för $t > 0$!

Svar: $\dfrac{E}{55R}\left[22 + 3\mathrm{e}^{-\frac{5R}{3L}t}\right]$



Ex7.36 Genom lämpligt val av komponentvärdena kan strömmen i spolen bli större än generatorströmmen. Bestäm, uttryckt i $r,\ L,\ C$ och R, den vinkelfrekvens, för vilken strömmen i spolen blir maximal! **L**

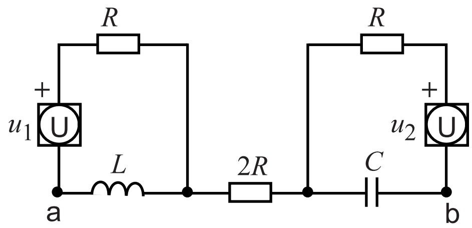
Svar: $\sqrt{\dfrac{1}{LC} - \dfrac{1}{2R^2C^2} - \dfrac{r^2}{2L^2}}$



Ex7.37 I nätet enligt figuren är $u_1 = 10\ \sin(\omega\, t)\,\mathrm{V}$, $\omega = 1000\,\mathrm{rad/s}$, $L = 4,0\,\mathrm{mH}$, $C = 250\,\mu\mathrm{F}$ och $R = 3,0\,\Omega$.

För vilket $u_2(t)$ blir spänningen noll mellan punkterna a och b?

Svar: $u_2(t) = 10\sin(\omega t - 0,29)\mathrm{V}$, där $\omega = 1000\,\mathrm{rad/s}$



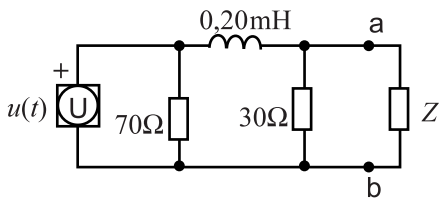
Ex7.38 Bestäm den största aktiva effekt, som man kan få i Z, om

a) Z kan varieras godtyckligt

b) Z är rent resistiv.

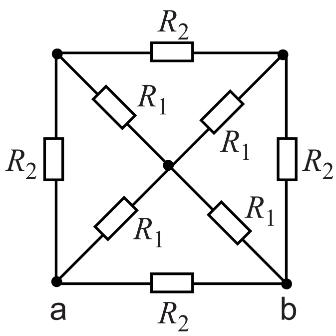
$u(t) = 100\cos(\omega t)\,\mathrm{V}$ och $\omega = 100\,\mathrm{rad/s}$.

Svar: a) 94 W *b*) 67 W

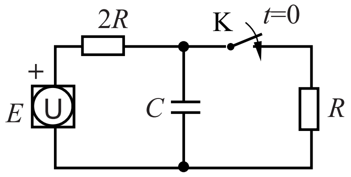


Ex7.39 Bestäm resistansen mellan a och b för nätet enligt figuren! De fyra inre resistorerna har vardera resistansen R_1, de yttre R_2.

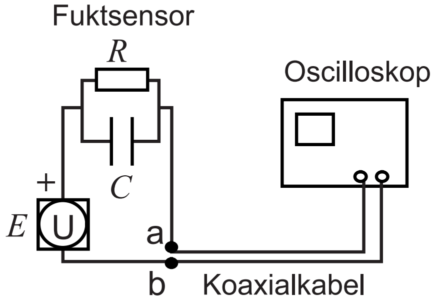
Svar: $\dfrac{2R_1R_2(R_2 + 3R_1)}{(R_2 + 2R_1)(R_2 + 4R_1)}$



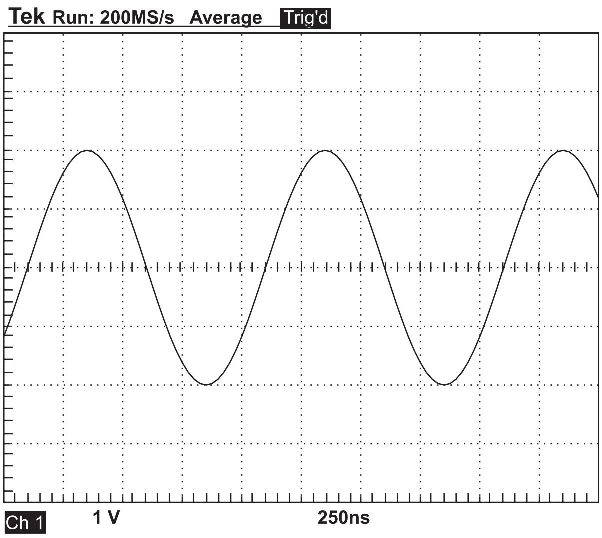
Ex7.40 För $t < 0$ råder stationärt tillstånd. Vid $t = 0$ sluts kontakten K.
Bestäm generatorströmmen som funktion av tiden för $t > 0$, då E är en likspänning! Svar: $\dfrac{E}{3R}\left[1 - e^{-\frac{3}{2CR}t}\right]$



Ex7.41 Osqulda misstänker att en trävägg i hennes lägenhet är fuktskadad. Hon bygger en fuktsensor som består av två spetsar som man kan trycka in i den undersökta väggen. Mellan spetsarna ser man då en resistans R och en kapacitans C som båda är funktioner av fukthalten. Osqulda ansluter en spänningskälla och ett oscilloskop enligt figuren. **L**



Koaxkabelns kapacitans är $C_k = 100\,\text{pF}$, oscilloskopet har inimpedans bestående av $R_{in} = 1\,\text{M}\Omega$ och $C_{in} = 20\,\text{pF}$. Nedanstående bild föreställer resultatet av Osquldas mätning på en referensplanka.



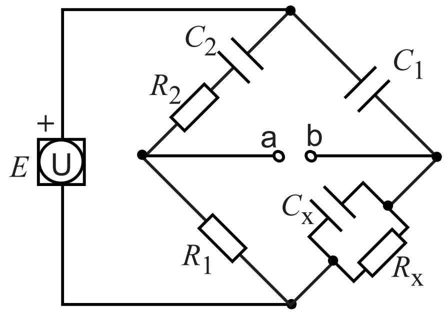
Osqulda vet att för denna planka är $R = 1\,\text{M}\Omega$ och $C = 120\,\text{pF}$.
För att få högre avläsningsnoggrannhet ansluter Osqulda dessutom en digitalvoltmeter med $R_{in} = 1\,\text{M}\Omega$ och $C_{in} = 20\,\text{pF}$. via en likadan koaxkabel till polparet ab. Vad visar digitalvoltmetern?
Ledning: Osqulda lånade oscilloskopet och digitalvoltmetern från en avdelning, TET. TET:s digitalvoltmeter mäter sant effektivvärde.

Svar: 0,94 V

Ex7.42 En elektrisk gräsklippare, ansluten till 230 V, 50 Hz, har en motor med effekten $P = 1500$ W vid effektfaktorn 0,9. Osquar ansluter den till nätet via en skarvsladd som är 50 m lång. Hur mycket aktiv effekt förbrukas i sladden? **L**
Ledning: En ledare med tvärsnittsarean $0,75\text{mm}^2$ har resistansen $24\,\Omega/\text{km}$.

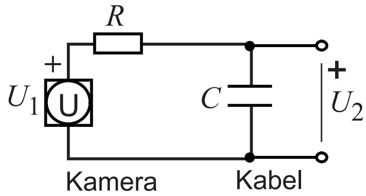
Svar: 110 W

Ex7.43 Nedanstående nät föreställer en Scheringbrygga. En sådan används för mätning av kapacitanser vid höga frekvenser eftersom den går att balansera med variabla kapacitanser som till skillnad från variabla resistanser kan göras (relativt) frekvensoberoende. Bestäm balansvillkoret, dvs R_x och C_x uttryckt i C_1, C_2, R_1, R_2, när spänningen $U_{\text{ab}} = 0$. **L**



Svar: $R_x = R_1 \dfrac{C_2}{C_1}$ $\quad C_x = C_1 \dfrac{R_2}{R_1}$

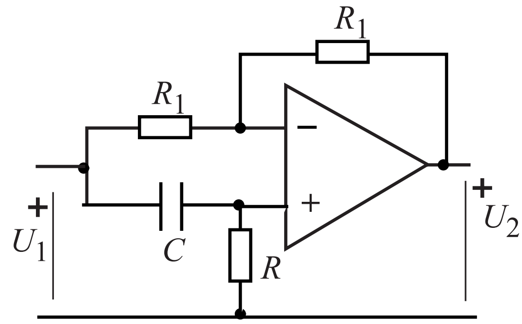
Ex7.44 Emil vill installera en TV-kamera utanför porten så att han kan se när Osquar kommer på besök. Han köper en färgkamera och en rulle kabel typ 2461 som har kapacitansen 167 pF/m. När han kopplat kabeln till videoingången i datorn ser han en svart-vit bild. Han blir mycket upprörd och försöker ringa butiken där han köpte kameran. Naturligtvis fastnar han i växelns telefonsvarare. **L**



Han ringer då Osquar som frågar om kamerans utimpedans och videoingångens inimpedans. Efter en djupdykning i manualerna svarar Emil att dessa är $75\,\Omega$ respektive $10\,\text{k}\Omega$. Osquar räknar en stund och berättar för den förbluffade Emil att kabeln är för lång. Om den kortas ner till c:a 25 m kommer färgen att synas. Redovisa för Emil hur Osquar kom fram till denna slutsats.
Ledning: Färginformationen i PAL-systemet (som används bl.a. i Sverige) överförs på en s.k. underbärvåg med frekvensen 4,43 MHz. Dämpas den med mer än 20 dB relativt signaler med låga frekvenser (som innehåller svart-vit information) tolkas bilden som svart-vit av mottagaren.
Ledning: Dämpning Γ uttrycks vanligen med hjälp av den logaritmiska enheten dB (decibel). Den kan definieras som $\Gamma = 20 \cdot \lg \dfrac{U_1}{U_2}$ dB, och 20 dB motsvarar ett spänningsförhållande på 10 ggr. lg är beteckningen för "10-logaritmen",

Ex7.45 Emil tycker att hans nyinköpta CD-spelare låter illa. Osqulda, som kan Elkrets, konstaterar (mha en referensskiva och ett oscilloskop) att det bandbredsbegränsade lågpassfiltret i spelaren är felkonstruerat och orsakar frekvensberoende fasskift i passbandet. På grund av mycket kompakt konstruktion är det svårt att modifiera det befintliga filtret. **L**

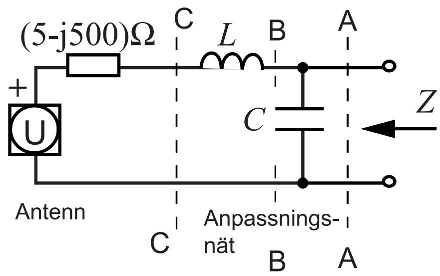
Osqulda råder Emil att koppla in ett extra filter mellan CD-spelaren och förstärkaren som korrigerar fasskiftet. Osquldas förslag avbildas här.
Beräkna $|F|$ och $\arg(F)$ som är det nya filtrets fasskift. $F = U_2/U_1$!



Svar: $\quad |F| = 1 \qquad \arg\{F\} = \pi - 2\arctan\omega RC)$

Ex7.46 Emil tröttnade på sin gamla rostiga bilantenn. Han hittade en snygg och diskret mobiltelefonatenn som han monterar på sin bil och kopplar till bilradion. Mottagningen blev dock sämre än med den gamla. Från Osquar (som har läst kursen Tillämpad Antennteknik, som ges av TET) får han tipset att anpassa antennen till radions ingångsresistans som är $50\,\Omega$. Han kontaktar antennes tillverkare och får veta att vid frekvensen som han mest lyssnar på (107,1 MHz) kan antennen ses som en tvåpol med impedansen $(5 - \mathrm{j}500)\,\Omega$. Den dåliga mottagningen är resultatet av den grova missanpassningen. **L**

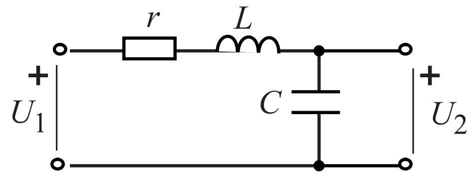
Emil, med Osquar som handledare, tänker bygga ett LC -anpassningsnät mellan antennen och radion. Visa att det är möjligt att med lämpliga L och C få impedansen Z rent resistiv. Beräkna L och C så att $Z = 50\,\Omega$.



Svar: $\quad L = 765\,\mathrm{nH}$

Ex7.47 Osqulda (som har läst Elkrets) bor i en andrahandslägenhet utrustad med kabel-TV. Hennes favoritprogram går inte att se på grund av en kraftig störning som leverantören av kabel-TVn har lagt dit. Störsignalen och TV-signalen är lika starka. Osquldas ekonomi tillåter inte investering i en dekoder. Under ett studiebesök hos grannen inser hon att dekodern består av ett filter som tar bort störsignalen vars frekvens ligger nära TV-signalen. Hon bestämmer sig för att bygga en serieresonanskrets med samma funktion. Detta är naturligtvis olagligt och i följande text har vi ändrat på talvärden för att inte underlätta byggandet av piratdekodrar. **L**

Vi antar att TV-kanalen sänds på frekvensen 202 MHz, störsignalen på 198 MHz och att för en god mottagning krävs att TV-signalen är 10 gånger starkare än störsignalen (gäller spänningar). Vilket Q-värde måste resonanskretsen ha för att detta skall uppnås?



Svar: $Q_0 = 256$
Tips: Välj 202 MHz som kretsens resonansfrekvens. Beräkna kvoten av kondensatorspänningens belopp vid de två frekvenserna. Uttryck allt i Q_0 och ω_0. Frekvenserna som skall separeras ligger nära varandra. Det betyder att $Q \approx Q_0$.

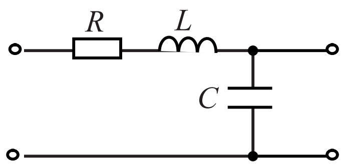
Ex7.48 Vid frekvenser högre än några hundra MHz är det opraktiskt att ha hög ingångsresistans på sina mätinstrument. Man har standariserat dessa till $R_{\text{in}} = 50\,\Omega$. På samma sätt är utgångsresistanserna på generatorerna standariserade till $R_{\text{ut}} = 50\,\Omega$. Osquar skall mäta kapacitansen på en kondensator vid frekvensen $f = 1,0\,\text{GHz}$. Han har en voltmeter och en generator för denna frekvens. **L**

Först ansluter han voltmetern direkt till generatorn (utan kondensator) och läser av 0,7 V. Sedan ansluter han den okända kondensatorn utan att ändra något i övrigt och läser av 0,5 V.
Beräkna kondensatorns kapacitans C.

Svar: $C = 6,2\,\text{pF}$

Ex7.49 Flera företag marknadsför speciella kablar avsedda att kopplas mellan stereon och högtalarna i syftet att förbättra ljudkvaliten. Alla kablar fungerar som lågpassfilter och meningen är att dessa kablar skall vara bättre än vanliga i detta avseende. Dessutom anses sådana kablar minska ickelinjära distortioner, något som man på goda grunder kan betvivla. Detta ingår dock inte i denna kurs. **L**

En stereoförstärkare kan ses som en tvåpol med försumbar utresistans. Högtalarna har en impedans som varierar med frekvensen, en hyfsad approximation är dock en resistans R_H.
Ekvivalent schema för kabeln är

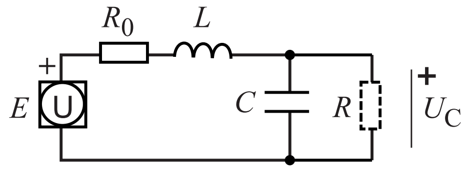


a. Beräkna U/E där U är högtalarens spänning och E förstärkarens utsignal. Svaret skall ges på formen $\dfrac{a}{b + \text{j}c}$.

b. Gränsfrekvensen definieras som den frekvens, vid vilken spänningen sjunker med faktorn $1/\sqrt{2}$ jämfört med värdet vid $\omega = 0$. Formulera sambandet mellan gränsfrekvensen och nätets komponenter. Gränsfrekvensen behöver inte lösas ut ur sambandet.

Svar: $$\frac{U}{E} = \frac{R_H}{R_H + R - \omega^2 R_H LC + \text{j}\omega(L + RR_H C)}$$

Ex7.50 Emil lindar en spole och vill kontrollmäta induktansen. Han plockar fram sitt oscilloskop och sin sinusgenerator. Enligt tillverkaren har oscilloskopet ingångsresistansen $R \approx 1,0\text{M}\Omega$ och ingångskapacitansen $C \approx 20\,\text{pF}$. Generatorns utgångsresistans är $R_0 = 50\Omega$. Emil kopplar sin spole mellan generatorn och oscilloskopet. **L**

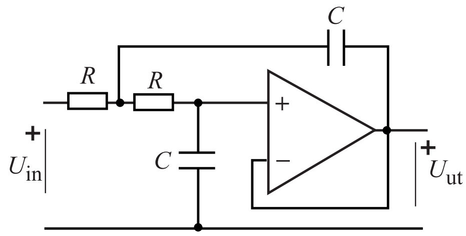


Han varierar frekvensen på generatorn och finner att oscilloskopet visar den största spänningen 1,5 V (topp till topp) vid frekvensen $f = 160\,\text{kHz}$. Hjälp Emil beräkna spolens induktans. Tips: Oscilloskopets ingångsresistans R är mycket stor.

Svar: $L = 50\,\text{mH}$

Ex7.51 Osqulda köpte en CD-brännare för att överföra sin stenkakssamling till ett modernare medium. Hon vet att de högsta frekvenserna på en nyinspelad stenkaka ligger runt 8 kHz, men hennes är ju ganska slitna och innehåller ingen information men en hel del brus över 6 kHz. Hon vill filtrera bort bruset före analog-digital-omvandlingen. Hon har ett program som kan användas för digitalfiltrering men hon har läst relevanta kurser och vet att för att detta skall fungera måste signalen lågpassfiltreras analogt i alla fall.

Hon bestämmer sig för ett aktivt filter med en op-amp kopplad som spänningsföljare Bestäm produkten RC så att utsignalen U_{ut} vid 6 kHz sjunker till hälften relativt utsignalen vid likspänning.

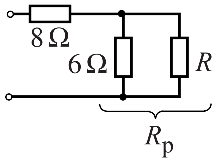


Svar: Ur sambandet $\dfrac{U_{ut}}{U_{in}} = \dfrac{1}{1 - (\omega CR)^2 + \mathrm{j}\,2\omega CR}$ får man $RC = 0,23\,\text{ms}$

Lösningar

Serie- och parallellkoppling

L2.4 Vi kallar för ett ögonblick de två parallellkopplade resistorernas ersättningsresistans för R_p.
R_p och 8-ohmsresistorn är seriekopplade, och då totala resistansen skall vara 10Ω, så blir
$10\Omega = 8\Omega + R_\mathrm{p}$, dvs $R_\mathrm{p} = 2\Omega$.
Nu är ju



$$\frac{1}{R_\mathrm{p}} = \frac{1}{6\Omega} + \frac{1}{R}, \text{ varur } \frac{1}{R} = (\frac{1}{2} - \frac{1}{6})\,\mathrm{S} = \frac{1}{3}\,\mathrm{S}$$

Detta ger $R = 3\,\Omega$:

Svar: $R = 3\,\Omega$

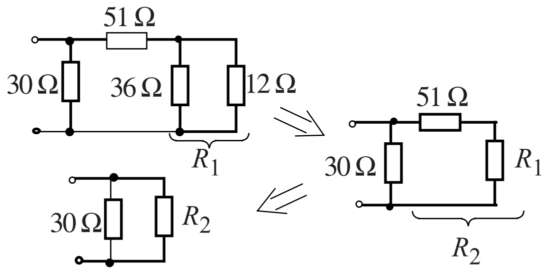
– –

L2.5 Reducera nätet successivt från höger

$R_1 = \dfrac{12 \cdot 36}{12 + 36}\,\Omega = 9\,\Omega$ (Parallellkoppling)

$R_2 = 51\,\Omega + 9\,\Omega = 60\,\Omega$(Seriekoppling)

$R_3 = \dfrac{30 \cdot 60}{30 + 60}\,\Omega = 20\,\Omega$ (Parallellkoppling)

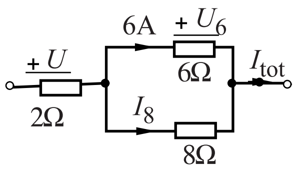


Svar: $R_\mathrm{ab} = 20\,\Omega$

– –

Ohms och Kirchhoffs lagar

L2.9 Samma spänning ligger över 6- och 8-ohmsresistorerna.
Strömmen genom 8-ohmsres. blir då $I_8 = \dfrac{U_6}{8\,\Omega}$, där
$U_6 = 6\,\mathrm{A} \cdot 6\,\Omega = 36\,\mathrm{V}$ ger $I_8 = 4,5\,\mathrm{A}$.
Totalströmmen $I_\mathrm{tot} = 6\,\mathrm{A} + I_8 = (6 + 4,5)\,\mathrm{A} = 10,5\,\mathrm{A}$
Spänningen $U = 2\,\Omega \cdot I_\mathrm{tot} = 21\,\mathrm{V}$.

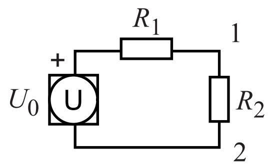


Svar: $U = 21\,\mathrm{V}$

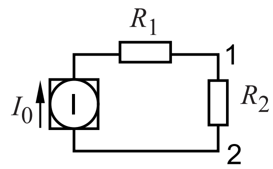
– –

Spänningsdelning och strömgrening

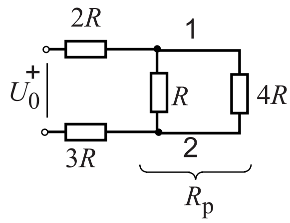
L2.13a Hela kretsens resistans är $R_{\text{tot}} = R_1 + R_2$. Strömmen blir
$I = \dfrac{U_0}{R_{\text{tot}}} = \dfrac{U}{R_1 + R_2}$
Spänningen $U_{12} = V_1 - V_2$ blir då, enligt Ohms lag ,
$U_{12} = R_2 \cdot I = \dfrac{R_2}{R_1 + R_2} U_0$
Detta är spänningsdelningsformeln!



L2.13b Här är strömmen given! I_0 är en ideal strömgenerator, som levererar I_0 oberoende av yttre betingelser.
Spänningen får man nu direkt!
$U_{12} = R_2 I_0$ =**Svar**



L2.15a Mellan 1 och 2 är inkopplade två resistorer i parallell.



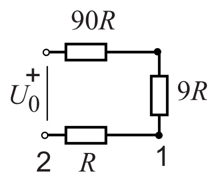
$$R_p = \frac{R \cdot 4R}{5R} = \frac{4}{5}R$$

Samma ström går nu genom "$2R$", "$(4R/5)$" och "$3R$".
Kalla strömmen I.

$$\left.\begin{aligned} [2R + 3R + (4/5)R]I &= U_0 \\ (4/5)RI &= U_{12} \end{aligned}\right\} \qquad \frac{U_{12}}{U_0} = \frac{(4/5)R}{(29/5)R} = \frac{4}{29}$$

Svar: Sökt spänning $U_{12} = (4/29)U_0$

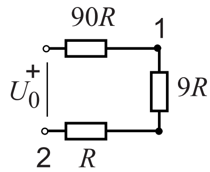
L2.15b Med användning av spänningsdelning får man



$$\frac{U_{12}}{U_0} = \frac{R}{(R + 9R + 90R)} = \frac{1}{100},$$

varur $U_{12} = U_0/100 =$ **Svar.**

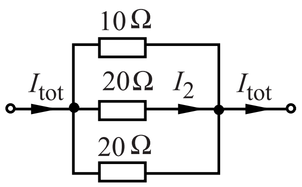
L2.15c På samma sätt som i b) blir



$$\frac{U_{12}}{U_0} = \frac{(R + 9R)}{(R + 9R + 90R)} = \frac{1}{10}$$

$$U_{12} = U_0/10 = \textbf{ Svar.}$$

L2.17 Rita om figuren först.



Enligt strömgreningssatsen, som gäller vid parallellkoppling, är $I_j = \dfrac{Y_j}{\sum Y_j} I_{\text{tot}}$

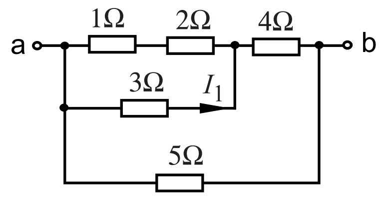
Detta ger $I_2 = \dfrac{1/20}{1/10 + 1/20 + 1/20} \cdot I_{\text{tot}} = I_{\text{tot}}/4$

$I_{\text{tot}} = 0,3\,\text{A}$ ger $I_2 = 0,075\,\text{A}$

Sökta strömmen blir $I = -I_2$ (ombytt def.riktn)!

Svar: $I = -75\,\text{mA}$

L2.20 Strömmarna genom 3-ohmsresistorn och 1- och 2-ohmsresistorerna är lika stora. Genom 4-ohmsresistorn flyter då $2 \cdot I_1$,



Ohms lag ger nu

$$3\Omega \cdot I_1 + 4\Omega \cdot 2I_1 = U_{\text{ab}}$$

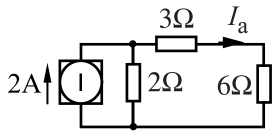
$U_{\text{ab}} = 10\,\text{V}$ ger

$$I_1 = (10/11)\,\text{A} \ = \ \textbf{Svar.}$$

Superposition. Mask- och nodanalys

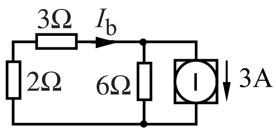
L2.22 Vid superposition skall en källa i taget behandlas. Övriga källor nollställs.

Med enbart "2A" ansluten ger strömgreningsformeln



$$I_a = \frac{2}{11} \cdot 2\,\mathrm{A} = \frac{4}{11}\,\mathrm{A}$$

Med enbart "3A" ansluten ger strömgreningsformeln



$$I_b = \frac{6}{11} \cdot 3\,\mathrm{A} = \frac{18}{11}\,\mathrm{A}$$

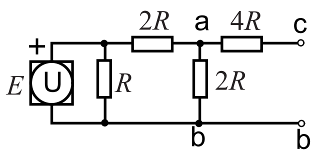
Superponera, dvs lägg ihop resultaten från de två fallen:

$I = I_a + I_b = \frac{22}{11}\,\mathrm{A} = 2\,\mathrm{A}$

Svar: $I = 2\,\mathrm{A}$

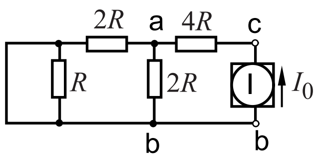
– –

L2.23 Använd superposition:



Endast emken ansluten. Resistorn R påverkar inte $U_{cb}^{(1)}$, och kan "tas bort". Spänningen mellan a och b är densamma som $U_{cb}^{(1)}$, eftersom 4R-resistorn är strömlös. Med spänningsdelning får man $U_{cb}^{(1)} = U_{ab} = E/2$.

Endast strömgeneratorn ansluten. Emken ersätts med en kortslutning. R är fortfarande betydelselös, den är nu strömlös. Sett från cb är inimpedansen



$$4R + \frac{2R \cdot 2R}{2R + 2R} = 5R$$

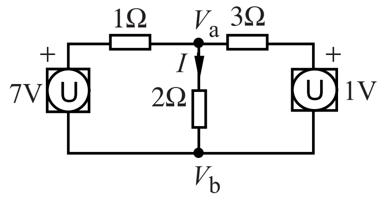
Spänningen $U_{cb}^{(2)} = 5R \cdot I_0$

Totala spänningen över strömgeneratorn

$$U_{cb} = U_{cb}^{(1)} + U_{cb}^{(2)} = E/2 + 5RI_0$$

Svar: $E/2 + 5RI_0$

L2.26a Inför nodpotentialerna V_a och V_b. Sätt $V_\mathrm{b} = 0$.



Kirchhoffs strömlag ger

$$\frac{V_\mathrm{a}-7}{1}+\frac{V_\mathrm{a}-0}{2}+\frac{V_\mathrm{a}-1}{3}=0$$

$$V_\mathrm{a}\left[1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right]=7+\frac{1}{3}$$

$$V_\mathrm{a}=4 \text{ varur } I=\frac{V_\mathrm{a}-0}{2}=2\,(\mathrm{A})$$

Svar: 2 A (Även här uteslöts enheterna)

– –

L2.26b Vid superposition skall en källa i taget anslutas, de andra nollställas.

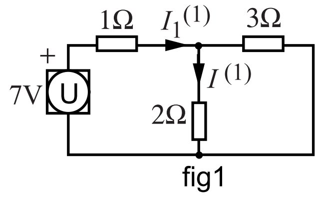
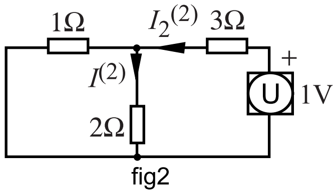


Fig 1 ger

$$I_1^{(1)}=\frac{7\,\mathrm{V}}{(1+\frac{2\cdot 3}{2+3})\,\Omega}=\frac{35}{11}\,\mathrm{A}$$

$$I^{(1)}=I_1^{(1)}\cdot\frac{3}{3+2}=\frac{21}{11}\,\mathrm{A}\quad\text{(strömgr.)}$$

Fig. 2 ger



$$I_2^{(2)}=\frac{1V}{(3+\frac{1\cdot 2}{1+2})\,\Omega}=\frac{3}{11}\,\mathrm{A}$$

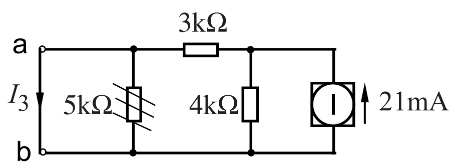
Strömgrening: $I^{(2)}=\dfrac{1}{1+2}I_2^{(2)}=\dfrac{1}{11}\,\mathrm{A}$

Svar: Totalströmmen $I=I^{(1)}+I^{(2)}=2\,\mathrm{A}$

– –

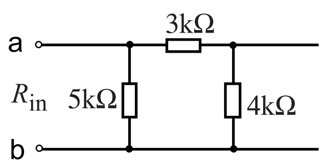
Tvåpolekvivalenter

L2.29 Kortslutningsströmmen får man via strömgrening:



$I_k = I_3 = \dfrac{1/3}{1/3+1/4}21\,\mathrm{mA}=12\,\mathrm{mA}.$

Inre resistansen beräknas med $I_\mathrm{gen}=0$, dvs med generatorn borttagen!



$$R_\mathrm{in}=\frac{5\cdot(3+4)}{5+(3+4))}\,\mathrm{k}\Omega=\frac{35}{12}\,\mathrm{k}\Omega=2,9\,\mathrm{k}\Omega$$

Nortonekvivalenten får då $I_0 = I_k$ och $R_0 = R_\mathrm{in}$

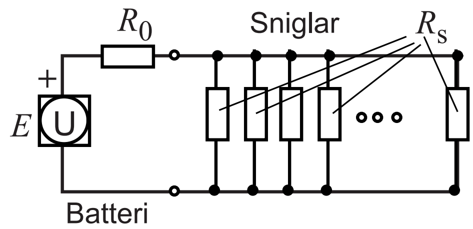
Svar: $I_0 = 12\,\mathrm{mA},\ R_0 = 2,9\,\mathrm{k}\Omega$

Praktiska beräkningsexempel

L2.32 Osquar hade 10 st 2,4 V glödlampor seriekopplade. Det betyder att hans spänningskälla var på $10 \cdot 2,4\,\mathrm{V} = 24\,\mathrm{V}$. Spänningsfallet över 10 st seriekopplade lysdioder blir $10 \cdot 2,1\mathrm{V} = 21\,\mathrm{V}$. Han måste alltså koppla en resistans R i serie.

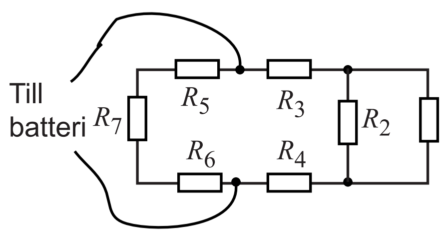
Spänningsfallet över denna blir $(24-21)\,\mathrm{V} = 3\,\mathrm{V}$. Strömmen genom hela kedjan måste bli 20 mA enligt tillverkarens specifikation. Detta ger $R = \dfrac{3\,\mathrm{V}}{20\,\mathrm{mA}} = 150\,\Omega$. Han har 3 st motstånd på $100\,\Omega$ vardera. Kopplar han två av dessa parallellt och den tredje i serie får han det önskade värdet.

L2.33 Ekvivalent schema:
44 parallellkopplade sniglar ger en belastningsresistans $R_\mathrm{L} = \dfrac{R_\mathrm{s}}{44} = \dfrac{880}{44}\,\Omega = 20\,\Omega$. Spänningsfallet över denna resistans skall inte understiga 22 V. Strömmen får då inte understiga $I = \dfrac{22}{20}\,\mathrm{A} = 1,1\,\mathrm{A}$. Den totala resistansen i kretsen får inte överstiga $R = \dfrac{E}{I} = \dfrac{24}{1,1}\,\Omega = 21,8\,\Omega$ $\quad R = R_\mathrm{L} + R_0$ ger $R_0 \leq 1,8\,\Omega$.

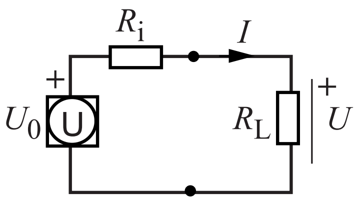


L2.34 Betrakta ålen som en tvåpol. Då är det uppenbart att uppgifterna i uppslagsverket refererar till tomgångsspänningen respektive kortslutningsströmmen. Ålens inre resistans är alltså $\dfrac{450}{1}\,\Omega = 450\,\Omega$. Maximal effekt fås vid anpassningen och är då $\dfrac{(450\,\mathrm{V})^2}{4 \cdot 450\,\Omega} = 112\,\mathrm{W}$.

L2.35 Ekvivalent schema: **L**
$R_1 = \dfrac{\pi}{2} \cdot (0,08\,\mathrm{m})\, R_\ell = 12,6\,\Omega$, $\quad R_2 = R_5 = R_6 = (0,08\,\mathrm{m}) \cdot R_\ell = 8,0\,\Omega$, $\quad R_7 = \pi \cdot (0,04\,\mathrm{m})\, R_\ell = 12,6\,\Omega+$, $\quad R_3 = R_4 = \dfrac{\pi}{4} \cdot (0,08\,\mathrm{m}) \cdot R_\ell = 6,3\,\Omega$
Totala resistansen är $R = 10,9\,\Omega$ och effektutvecklingen $P = \dfrac{U^2}{R} = 0,21\,\mathrm{W}$ per sula.



L2.36 Vi ansluter ett motstånd på $10\,\Omega$ till batteriet som representeras av en tvåpolekvivalent med inre resistansen R_{i} (okänd) och tomgångsspänningen $U_0 = 4,5\,\mathrm{V}$. U är då 3,7 V.



Ohms lag ger $I = \dfrac{U}{R_L}$ och

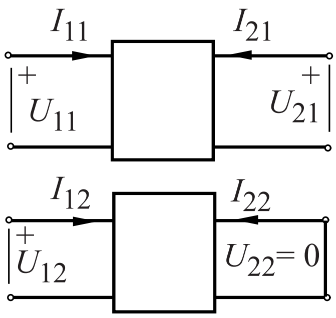
$$R_{\mathrm{i}} = \frac{U_0 - U}{I} = \frac{U_0 - U}{U} R_L = \frac{4,5 - 3,7}{3,7} \cdot 10\,\Omega = 2,2\,\Omega$$

Inre resistansen är alltså $2,2\,\Omega$

Tellegens teorem

L2.38 Tellegens teorem ger med

$U_{11} = 12\,\mathrm{V}\,, \quad U_{21} = 6\,\mathrm{V}\,,$
$I_{11} = 12\,\mathrm{A}\,, \quad I_{21} = ?$
$U_{12} = 12\,\mathrm{V}\,, \quad U_{22} = 0\,\mathrm{V}\,,$
$I_{12} = 14\,\mathrm{A}\,, \quad I_{22} = ?\,,$



$$U_{11}I_{12} + U_{21}I_{22} = U_{12}I_{11} + U_{22}I_{21}$$

Siffervärden ger

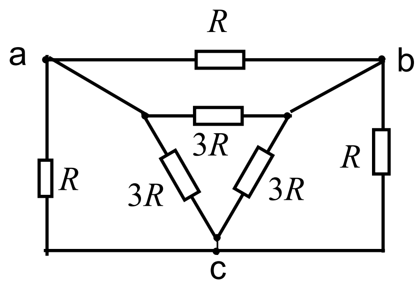
$$12 \cdot 14\,\mathrm{A} + 6 \cdot I_{22} = 12 \cdot 12\,\mathrm{A} + 0 \cdot I_{21}$$

Härur erhålls $I_{22} = -4\mathrm{A}$ **=Svar**

(Minustecknet innebär att strömmen 4A är motriktad definitionsriktningen)

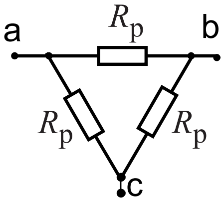
Δ-Y-transformation

L2.43 Gör om Y-kopplingen till ett Δ. Detta Δ-nät får grenresistanserna $3R$, vilket inses direkt av transformationsformeln.
Mellan a och b, b och c samt c och a finns parallellkopplade grenar, vars resulterande resistanser blir lika inbördes (R_{p})



Det resulterande Δ-nätets resistanser blir

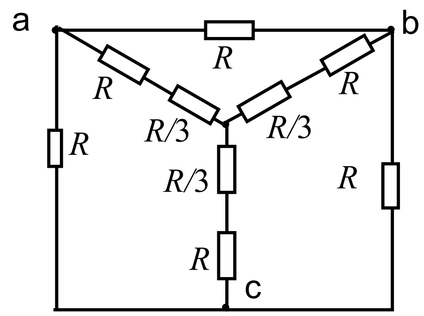
$$R_{\mathrm{p}} = \frac{R \cdot 3R}{R + 3R} = \frac{3}{4}R$$



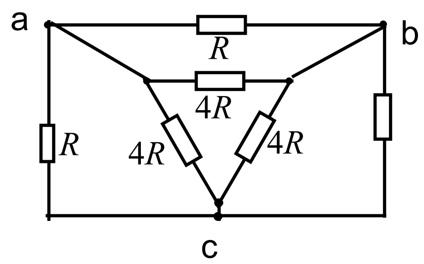
För totala resistansen mellan a och c får man då

$$R_{\mathrm{ac}} = \frac{R_{\mathrm{p}} \cdot 2R_p}{3R_{\mathrm{p}}} = \frac{R}{2} \quad \textbf{=Svar}$$

L2.44 Gör om inre Δ-kopplingen till ett Y. Detta Y får grenresistanserna $R/3$, vilket inses direkt av transformationsformeln.
Dessa grenresistanser är seriekopplade med resistanser R, vilket gör att det resulterande Y:et får resistanserna $4R/3$
Vi gör om detta resulterande Y till ett Δ, och grenresistanserna för detta Δ blir $3\,(4R/3) = 4R$



Dessa är i sin tur parallellkopplade med resistanser R, och vi får för grenresistanserna mellan a och b, b och c samt c och a



$$R_{\mathrm{ab}} = R_{\mathrm{bc}} = R_{\mathrm{ca}} = R_{\mathrm{p}} = \frac{4R \cdot R}{5R} = \frac{4}{5}R$$

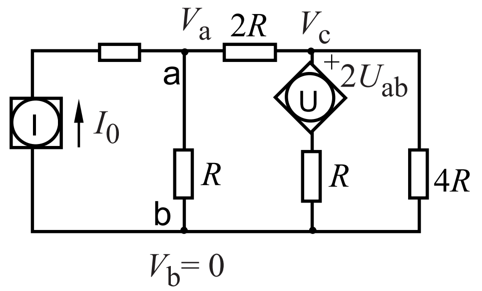
Totala resistansen mellan a och c blir alltså

$$R_{\mathrm{tot}} = \frac{R_{\mathrm{p}} \cdot 2R_{\mathrm{p}}}{R_{\mathrm{p}} + 2R_{\mathrm{p}}} = \frac{2}{3}R_{\mathrm{p}} = \frac{8}{15}R \quad = \textbf{Svar}$$

L2.46 Ritar man om nätet, får man exakt samma nät som i L2.43.
Detta problem finns löst.

Beroende generatorer

L3.1 Vi har här en beroende generator. Superposition kan då **inte** tillämpas på samma enkla sätt som i problem utan beroende generatorer.
Låt oss använda nodanalys och införa de obekanta potentialerna V_{a} och V_{c}. Vi sätter också $V_{\mathrm{b}} = 0$.



Kirchhoffs strömlag vid a och b ger

$$\begin{cases} \dfrac{V_{\mathrm{a}}}{R} + \dfrac{V_{\mathrm{a}} - V_{\mathrm{c}}}{2R} = I_0 \\[2ex] \dfrac{V_{\mathrm{c}} - V_{\mathrm{a}}}{2R} + \dfrac{V_{\mathrm{c}} - 2V_{\mathrm{a}}}{R} + \dfrac{V_{\mathrm{c}}}{4R} = 0 \end{cases}$$

Med våra beteckningar är $V_{\mathrm{a}} = U_{\mathrm{ab}}$.
Förenklingar ger

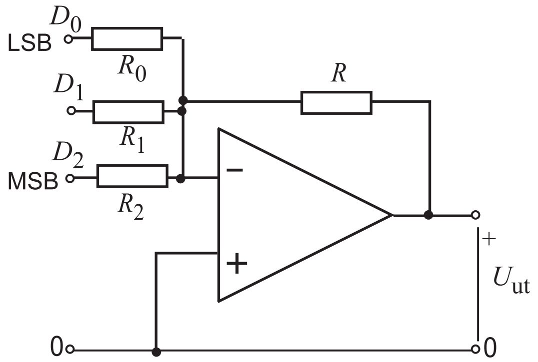
$$\begin{cases} 3V_{\mathrm{a}} - V_{\mathrm{c}} = 2RI_0 \\ -10V_{\mathrm{a}} + 7V_{\mathrm{c}} = 0 \end{cases}$$

Eliminerar man V_{c}, får man

$$V_{\mathrm{a}} = \frac{14}{11}RI_0 = U_{\mathrm{a}} \quad = \textbf{Svar}$$

– –

L3.5 När alla ingångar är låga (0 V) är utgångsspänningen $U_{\mathrm{ut}} = 0\,\mathrm{V}$.
När den minst signifikanta ingången (D_0) är hög (5 V) och de övriga låga skall $U_{\mathrm{ut}} = -10\,\mathrm{V}$ (ett steg). R_1 och R_2 ligger då mellan operationsförstärkarens ingångar och får spänningsfallet 0 V. De påverkar alltså inte kretsen och kan tas bort. Kvar har vi en inverterande förstärkare med insignalen 5 V och utsignalen −10 V. Förstärkningen måste vara $F = -10/5 = -2$ ggr. Vi vet att förstärkning i en sådan koppling är $F = -R/R_0$. Har vi glömt det, härleder vi sambandet på ett par rader*. Detta ger direkt $R_0 = R/2 = 5\,\mathrm{k}\Omega$.
Nu väljer vi D_0 och D_2 låga och D_1 hög. Utspänningen skall då vara $U_{\mathrm{ut}} = -20\,\mathrm{V}$.
På samma sätt som ovan får vi $R_1 = R/4 = 2,5\mathrm{k}\Omega$.
När D0 och D1 är låga och D2 hög måste Uut = -40 V. Detta ger $R2 = R/8 = 1,25\,\mathrm{k}\Omega$.

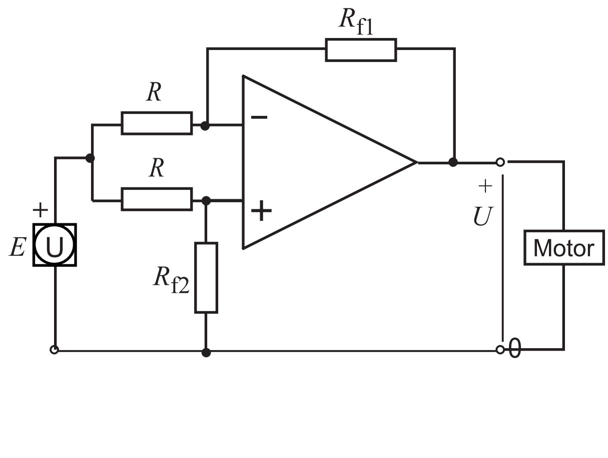


L

D/A omvandlaren är därmed dimensionerad. Alla spänningssteg på utgången kan fås genom att välja en lämplig kombination av digitala signaler på ingångarna, t. ex. −30 V ut vid D_0 och D_1 höga samt D_2 låg.
Härledning: Den inverterande ingången ligger på jordpotential (virtuell jord). Då är $U_{\mathrm{in}} = R_0\,I$ och $U_{\mathrm{ut}} = -R\,I$ där I är ingångsströmmen varav $F = U_{\mathrm{ut}}/U_{\mathrm{in}} = -R/R_0$.

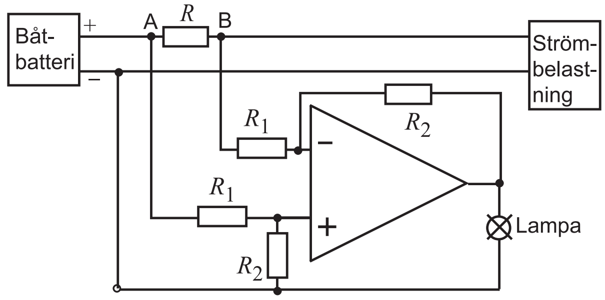
– –

L3.6 Spänningen mellan operationsförstärkarens ingångar är noll. Då är
$U = U_{R\mathrm{f2}} - U_{R\mathrm{f1}} = I(R\mathrm{f2} - R\mathrm{f1})$ och
$I = \dfrac{E}{R + R\mathrm{f2}}$ varur $U = E\,\dfrac{R\mathrm{f2} - R\mathrm{f1}}{R + R\mathrm{f2}}$
När fotomotstånden är lika starkt belysta är $U = 0$ och motorn står stilla. Är de ojämnt belysta får motorn positiv eller negativ spänning och vrider hela anordningen tills $R\mathrm{f2} = R\mathrm{f1}$ igen. Naturligtvis måste man se till att vridningsriktningen är korrekt, annars kommer solfångaren att vridas bort från solen.



– –

L3.7 Potentialen till vänster om R kallar vi V^{A} och till höger V^{B}. $V^{\mathrm{A}} - V^{\mathrm{B}}$ är spänningsfallet över R och alltså propotionellt mot strömmen I_R genom R. Vi får $V^{\mathrm{A}} - V^{\mathrm{B}} = RI_R$ **L**



Operationförstärkarens +ingång har (via spänningsdelning) potentialen $V^{+} = V^{\mathrm{A}}\dfrac{R_2}{R_1 + R_2} = V^{-}$, som också är potentialen på förstärkarens −ingång.

Vi har en inverterande koppling och då gäller att potentialen på operationsförstärkarens utgång erhålls ur $\dfrac{V^{+} - V_{\mathrm{ut}}}{R_2} = \dfrac{V^{\mathrm{B}} - V^{-}}{R_1}$.

Härur erhålls $V_{\mathrm{ut}} = \dfrac{R_2}{R_1}(V^{\mathrm{A}} - V^{\mathrm{B}}) = \dfrac{R_2}{R_1} \cdot RI_R$

Enligt förutsättningarna skall lampan lysa (dvs ha en spänning lika med 6 volt) då strömmen $I_R = 50\,\mathrm{mA}$. Dessa uppgifter samt de givna värdena på R_1 och R_2 ger $R = 1,0\,\Omega$

Inkopplingsförlopp

L4.2 På grund av induktion alstras i en spole en **motemk**

$$\mathcal{E} = \frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}$$

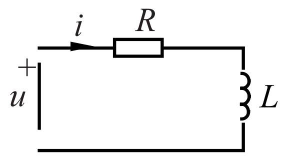
där Φ är det totala flödet i spolen. Mellan flöde och ström råder för ”luftspolar” ett linjärt samband

$$\Phi = L \cdot i$$

Motemken blir alltså

$$\mathcal{E} = L\,\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$$

Har spolen, förutom induktans L också resistans R, blir sambandet mellan pålagd spänning u och ström i



$$u = Ri + L\,\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$$

Är spänningen $u = \begin{cases} 0 & \text{för } t < 0 \\ U_0 & \text{för } t > 0 \end{cases}$

blir ekvationen för $t > 0$

$$L\,\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + Ri = U_0$$

Lösningen till denna ekvation är

$$i = \text{konst} \cdot \mathrm{e}^{-(R/L)t} + \frac{U_0}{R}$$

Då $i = 0$ vid $t = 0$, blir

$$i = \frac{U_0}{R}\,[1 - \mathrm{e}^{-(R/L)t}\,]$$

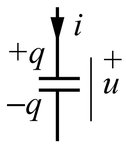
Med angivna talvärden:

$$U_0 = 6\,\mathrm{V} \quad R = 10\,\Omega \quad L = 10^{-3}\,\mathrm{H} \;\; \text{ger}$$

$$i = 0,6\,[1 - \mathrm{e}^{-10^4 t/[\mathrm{s}]}\,]\,\mathrm{A} \quad = \textbf{Svar}$$

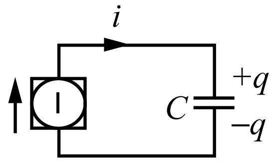
– –

L4.3 För en ideal kondensator gäller, med figurens beteckningar och def-riktningar,



$$\begin{cases} i &= \dfrac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} \\ \\ q &= Cu \end{cases}$$

Alltså blir $\quad q - q_0 = \int\limits_0^t i(t')\,\mathrm{d}t'$



a) $q_0 = 0$ ger

$$q = \int\limits_0^t i(t')\,\mathrm{d}t' = (0,1\,t/[\mathrm{s}])\,\mathrm{C}$$

$$u = q/C = 10^5\,t/[\mathrm{s}] \quad \mathrm{V}$$

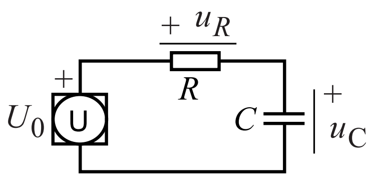
b) $q_0 = 2 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{C}$ ger

$$q \;= \{2 \cdot 10^{-6} + 0,1\,t/[\mathrm{s}]\}\,\mathrm{C}$$

$$u \;= (1/C)\,q = \{2 + 10^5\,t/[\mathrm{s}]\}\,\mathrm{V}$$

– –

L4.4 Resistorn och kondensatorn är seriekopplade. Då blir



$$U_0 = u_R + u_C$$

Nu är $\quad u_R = Ri$ och $\quad i = C\dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}$

Kombinerar man dessa uttryck får man diff-ekvationen.

$$RC\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} + u_C = U_0$$

Från matematiken vet vi att

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + ay = b \quad \text{har allmänna lösningen}$$

$$y = \text{konst} \cdot \mathrm{e}^{-at} + b/a$$

I vårt exempel är $y = u_C$, $a = 1/(RC)$ och $b = U_0/(RC)$. Detta ger

$$u_C = \text{konst} \cdot \mathrm{e}^{-t/(RC)} + U_0$$

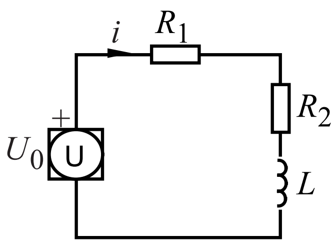
Vid $t = 0$ var $u_C = 0$, vilket ger

$$u_C = U_0[1 - \mathrm{e}^{-t/(RC)}] = 12[1 - \mathrm{e}^{-0,1t/[\mathrm{s}]}]\,\mathrm{V} \quad \textbf{=Svar a)}$$

$$i = C\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} = 1,2\,\mathrm{e}^{-0,1t/[\mathrm{s}]}\,\mathrm{mA} \quad \textbf{=Svar b)}$$

– –

L4.6 För $t > 0$ gäller



$$U_0 = (R_1 + R_2)\,i + L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$$

$$\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + \frac{R_1 + R_2}{L}\,i = \frac{U_0}{L}$$

Allmänna lösningen till denna ekvation är

$$i(t) = \frac{U_0}{R_1 + R_2} + k\,\mathrm{e}^{-\frac{R_1+R_2}{L}\,t}$$

Vid $t = 0$ är $i = 0$, varur $k = -\dfrac{U_0}{R_1 + R_2}$

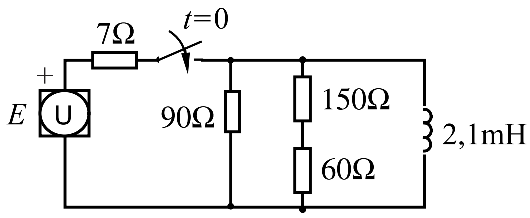
Detta ger

$$i(t) = \frac{U_0}{R_1 + R_2}\,[1 - \mathrm{e}^{-\frac{R_1+R_2}{L}\,t}] = 1,25\,[1 - \mathrm{e}^{-2\cdot 10^6\,t/[\mathrm{s}]}]\,\mathrm{mA}$$

För $t = 0,1\,\mu\mathrm{s}$ blir $i = 0,23\,\mathrm{mA} =$ **Svar**

– –

L4.7 Rita om nätet, så att spolen kommer längst till höger. Reducera nu nätet enligt figuren.

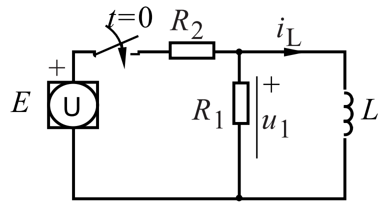


$$R_1 = \frac{90\cdot(150+60)}{90+(150+60)}\,\Omega = 63\,\Omega$$

$R_2 = 7\,\Omega$ och $E = 12,6\,\mathrm{V}$

a) För $t < 0$ är $i_L = 0$

b) För $t > 0$ gäller



$$\begin{cases} \dfrac{E - u_1}{R_2} = \dfrac{u_1}{R_1} + i_L \\ \\ u_1 = L\,\dfrac{\mathrm{d}i_L}{\mathrm{d}t} \end{cases}$$

Eliminerar man u_1 får man

$$\frac{E}{R_2} = L\,\frac{\mathrm{d}i_L}{\mathrm{d}t}\Big(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\Big) + i_L$$

Sätt $R_0 = \dfrac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} = 6,3\,\Omega$ och $U_0 = \dfrac{R_1}{R_1 + R_2}E = 11,3\,\mathrm{V}$ så blir ekvationen

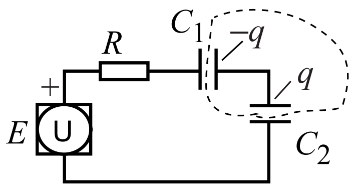
$$\frac{\mathrm{d}i_L}{\mathrm{d}t} + \frac{R_0}{L}\,i_L = \frac{U_0}{L} \quad \text{som har allmänna lösningen}$$

$$i_L = \frac{U_0}{R_0} + k\,\mathrm{e}^{-\frac{R_0}{L}t}$$

Strömmen skall vara kontinuerlig ($i_L = 0$ för $t = 0$), varur $k = -\dfrac{U_O}{R_0}$. Detta innebär att

$$i_L = \frac{U_0}{R_0}\,[1 - \mathrm{e}^{-\frac{R_0}{L}t}] = 1,8[1 - \mathrm{e}^{-3000t/[\mathrm{s}]}]\,\mathrm{A} = \textbf{Svar}$$

L4.10 Under hela uppladdningsförloppet kommer de båda kondensatorerna att ha inbördes lika laddning (q). Spänningarna över kondensatorerna kommer då att bli



$u_1 = q/C_1$ resp $u_2 = q/C_2$.

Kirchhoffs spänningslag ger då

$$E = R\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} + \frac{q}{C_1} + \frac{q}{C_2}$$

Med $\dfrac{1}{C_0} = \dfrac{1}{C_1} + \dfrac{1}{C_2}$ dvs $C_0 = \dfrac{C_1C_2}{C_1 + C_2}$ förenklas ekvationen ovan till

$\dfrac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} + \dfrac{q}{RC_0} = \dfrac{E}{R}$ med lösningen $q = C_0E\left[1 - \mathrm{e}^{-(1/RC_0)\,t}\right]$

Här har vi använt oss av att laddningen i begynnelsen var noll.

Den sökta spänningen blir nu

$u_2 = \dfrac{q}{C_2} = \dfrac{EC_1}{C_1 + C_2}\left[1 - \mathrm{e}^{-(1/RC_0)\,t}\right] = 0,3\left[1 - \mathrm{e}^{-500\,t/[\mathrm{s}]}\right]\mathrm{V}$ =**Svar**

– –

L4.11 a. Omkopplaren i vänsterposition:

Kirchhoffs spänningslag ger $E = R_1 i + u_C = R_1 C\dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} + u_C$.

Denna diffekvation har lösningen

$u_C = A\mathrm{e}^{-t/R_1C} + E$.

Från startvillkoret $u_C(0) = 0$ fås $A = -E$ och $u_C = E(1 - \mathrm{e}^{-t/R_1C})$.

Derivering ger $i = \dfrac{E}{R_1}\mathrm{e}^{-t/R_1C}$. Efter $t = 10\,\mathrm{ns}$ skall strömmen vara mindre än $40\,\mu\mathrm{A}$.

Insättning ger $40 \cdot 10^{-6} = \dfrac{4}{100}(1 - \mathrm{e}^{-10^{-8}/R_1C})$, varur $C = 14,5\,\mathrm{pF}$.

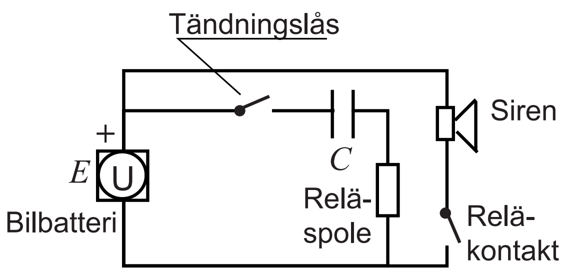
b. Omkopplare i högerposition. $u_C = (-iR_2) = -R_2C\dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}$ har lösningen

$u_C = AE\mathrm{e}^{-t/R_2C}$.

Startvillkoret $u_C(0) = 4\,\mathrm{V}$ behövs inte här. Spänningen får inte sjunka mer en 1% och detta ger $0,99 = \mathrm{e}^{-t_2/R_2C}$, som i sin tur ger $t_2 = 1,45\,\mu\mathrm{s}$.

– –

L4.12 Kretsdelen med sirenen är oväsentlig för lösningen. Innan strömmen slås på med startnyckeln är kondensatorn C urladdad $(u_C = 0)$.



Efter tillslaget är strömmen stor i början (spänningsfallet över C är litet). Nästan hela batterispänningen (12 V) ligger över reläets spole (som här representeras av resistansen R) och reläets kontakter sluts. Sirenen tjuter.

När kondensatorn laddas minskar spänningen över reläets spole och när den sjunker till 6 V öppnas reläets kontakter och sirenen tystnar. Kirchhoffs spänningslag för slingan E, C, R ger

$u_R + u_C = E \qquad u_C(0) = 0,$

$Ri + u_C = E \qquad i = C\dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}$

Insättning ger en diffekvation

$RC\dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} + u_C = E$

som har lösningen

$u_C = E + A\mathrm{e}^{-t/RC}$

Startvillkoret $u_C = 0$ ger $A = -E$ och

$u_c = E(1 - \mathrm{e}^{-t/RC})$

och strömmen $i_C = C\dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} = \dfrac{E}{R}\mathrm{e}^{-t/RC}$

Slutligen, spänningen över reläets spole blir

$u_R = E\mathrm{e}^{-t/RC}$

Insättning av talvärden ger

$6 = 12\mathrm{e}^{-t/RC} \qquad$ varur $\dfrac{t}{RC} = \ln(2)$,

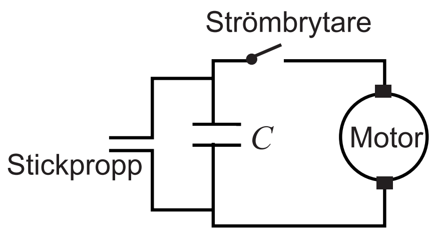
som med $t = 10\,\mathrm{s}$, $R = 4000\,\Omega$ ger C = 3,6 mF.

Ett mycket stort men inte orimligt värde.

En grov uppskattning kan göras m.h.a. tidkonstanten $\tau = RC$. Den ger $C = 2,5\,\mathrm{mF}$.

– –

L4.13 a. När vispen är ansluten till nätet får kondensatorn nätets spänning. När stickproppen dras ut ur vägguttaget har kondensatorn kvar denna spänning. Men nätets spänning är ju sinusformad. Beroende på i vilket ögonblick stickproppen dras ur kan spänningen vara allt mellan 0 V och $230\sqrt{2}\,\mathrm{V}$=400 V.



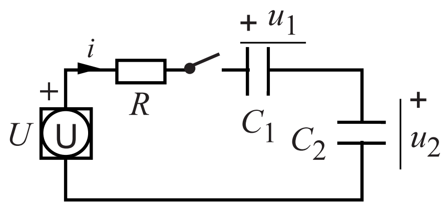
b. Efter frånkopplingen kommer kondensatorn att urladdas genom parallellresistansen enligt sambandet $u = E\mathrm{e}^{-t/\tau}$

Insättning av värden från Osquars experiment ger $\dfrac{u}{E} = \mathrm{e}^{-t/\tau}$ som med $\dfrac{u}{E} = 0,5$ och med $t = 6\,\mathrm{s}$ ger $\tau = 8,7\,\mathrm{s}$.

Spänningen sjunker till 1% av startvärdet efter tiden T. Detta ger $0,01 = \mathrm{e}^{-T/\tau}$ varur $T = 40\,\mathrm{s}$.

– –

L4.14 $C_1 = \dfrac{q}{u_1} \quad C_2 = \dfrac{q}{u_2} \quad i = \dfrac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}$



$$U = Ri + u_1 + u_2 = R\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} + \frac{q}{C_1} + \frac{q}{C_2} =$$
$$R\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} + q\frac{C_1 + C_2}{C_1C_2}$$
$$q(t) = \frac{UC_1C_2}{C_1 + C_2} + A\mathrm{e}^{-t(C_1+C_2)/(RC_1C_2)}$$

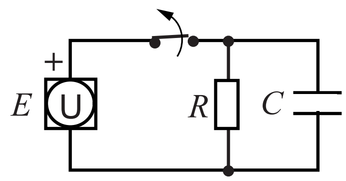
Randvillkoret $q(0) = 0$ ger $A = -\dfrac{UC_1C_2}{C_1 + C_2}$ varur

$$u_2(t) = \frac{q(t)}{C_2} = \frac{UC_1}{C_1 + C_2}\left(1 - \mathrm{e}^{-t(C_1+C_2)/(RC_1C_2)}\right)$$

u_2 får inte överskrida $U/2$ vid någon tidpunkt. Det ger villkoret $\dfrac{1}{2} = \dfrac{C_1}{C_1 + C_2}$, varur $C_1 = C_2$.

Maximal tillåten längd är $\ell = \dfrac{C_2}{C_\ell} = 0,01\,\mathrm{m} = 1\,\mathrm{cm}$.

L4.15 Du får ett ekvivalent elektriskt nät enligt figuren.



$u_C = Ri\,, \quad i = -C\dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}$ ger

$\dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} + \dfrac{1}{RC}u_C = 0,$ som har lösningen

$u_C = A\mathrm{e}^{-t/RC}$,

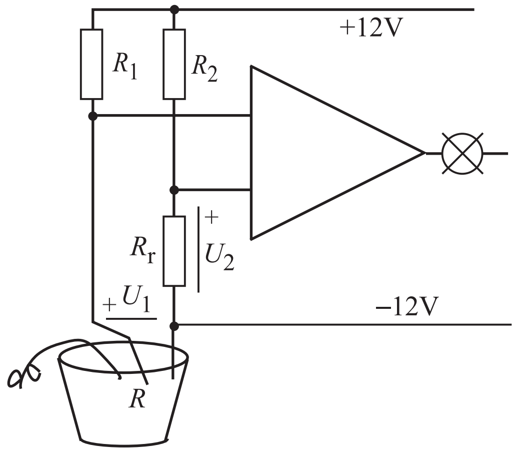
där A från begynnelsevillkoret $u_C(0) = E$ (motorn stängs) är $A = E$.

Enligt analogin är $E = 95^\circ - 20^\circ = 75^\circ$ och $u_C''(t = T + 90\mathrm{min}) = 40^\circ - 20^\circ = 20^\circ$.
Vid den okända tidpunkten T är $u_C'(t = T) = 60^\circ - 20^\circ = 40^\circ$.
Detta leder till följande samband:

$$\begin{cases} \ln \dfrac{u_C''}{E} = -\dfrac{T + 90\mathrm{min}}{RC} \\ \ln \dfrac{u_C'}{E} = -\dfrac{T}{RC} \end{cases}$$

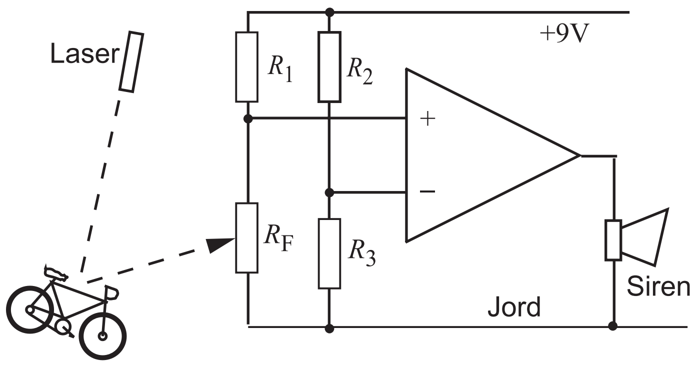
Ur dessa samband erhålls att motorn stannade vid $T = 82\,\mathrm{min}$ innan polisen gjorde den första mätningen.

L4.16 En enkel lösning är att låta båda ingångarna ha potentialen 0 V. Detta åstadkommes med hjälp av spänningsdelarna $R_1 = R = 6\,\mathrm{k}\Omega$ och $R_2 = R_r = 10\,\mathrm{k}\Omega$. Vi vill att lampan lyser när jorden är torr. Det betyder att resistansen $R < 6\,\mathrm{k}\Omega$. Potentialen på ingången som är kopplad till den vänstra spänningsdelaren (nod A) är då större än noll.



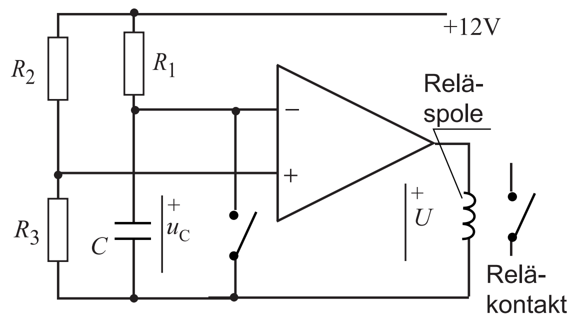
Är det den inverterande ingången (som i figuren) kommer spänningen på utgången att bli -12 V. För att lampan skall lysa måste den den kopplas mellan utgången och $+12$ V. Den får då 24 V. När fikusen är vattnad sjunker resistansen R och när den är mindre än $6\,\mathrm{k}\Omega$ byter komparatorn tillstånd. Nu är det $+12$ V på komparatorns utgång och lampan får ingen ström. Man kan lika gärna göra tvärtom, ansluta punkt A till den ickeinverterande ingången och lampan mellan utgången och -12 V.

L4.17 Det laserbelysta fotomotståndet har en resistans av $10\mathrm{k}\Omega$ och i mörkret ökar resistansen till $10\mathrm{M}\Omega$. Vi väljer en resistans i intervallet $10\mathrm{k}\Omega < R_3 < 10M$, t.ex. $100\mathrm{k}\Omega$. När laserstrålen är borta är då fotomotståndets resistans större än R_3 och spänningsfallet över fotomotståndet större än över $4R_3$.



Om vi väljer ingångarna enligt figuren får den ickeinverterande ingången högre potential än den ickeinverterande och utgången bottnar positivt, dvs mycket nära $+9$ V. Sirenen får sin spänning och larmet går.

L4.18



a) $t < 0 \quad u_C = 12\,\text{V} > \dfrac{R_3}{R_3 + R_2} 12\,\text{V} =$
$3,812\,\text{V}$
Op-ampens utgång har potentialen 0 V och reläet får ingen ström. Kaffebryggaren är avstängd.
$t = 0$

Osquar trycker på knappen och släpper den. Kondensatorn urladdas praktiskt taget momentant till $0\,\text{V} (< 3,8\,\text{V})$ och op-ampens utgång blir positiv, reläet drar och kaffebryggaren startar. Kondensatorn börjar laddas igen via R_1.
$t > 0$

$$i = C\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}, \quad i = \frac{12\,\text{V} - u_C}{R_1} \Rightarrow \frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} + u_C \cdot \frac{1}{R_1 C} = \frac{12\,\text{V}}{R_1\, C} \Rightarrow u_C(t) = 12\,\text{V} + A\mathrm{e}^{-t/R_1 C}$$

Begynnelsevillkoret vid $t = 0$ ger $12\,\text{V} + A = 0$ som i sin tur ger
$u_C(t) = 12(1 - \mathrm{e}^{-t/R_1 C})\,\text{V}$
Kondensatorspänningen stiger tills den passerar referensspänningen på den ickeinverterande ingången. Då blir reläet strömlöst och kaffebryggaren stängs av. Detta inträffar då $3,8 = 12(1 - \mathrm{e}^{-t/R_1 C})$ dvs för $\mathrm{e}^{-t/R_1 C} = 1 - \dfrac{3,8}{12}$, varur
$-\dfrac{T}{R_1 C} = \ln 0,68 = -0,38$, som ger $C = 192\,\mu\text{F}$.

b) Vi försummar inte den parallella resistansen R

$$t < 0 \quad u_C = 12\,\text{V} \cdot \frac{R}{R_1 + R} = 6,6\,\text{V} > \frac{R_3}{R_3 + R_2} 12\,\text{V} = 3,8\,\text{V}$$

Op-ampens utgång har potentialen 0 V och reläet får ingen ström. Kaffebryggaren är avstängd.
$t = 0$
Osquar trycker på knappen och släpper den. Kondensatorn urladdas praktiskt taget momentant till 0 V $(< 3,8\,\text{V})$ och op-ampens utgång blir positiv, reläet drar och kaffebryggaren startar. Kondensatorn börjar laddas igen via R_1.

$$t > 0 \quad i = C\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}, \quad i_R = \frac{u_C}{R} \Rightarrow (C\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} + \frac{u_C}{R})R_1 + u_C = 12\,\text{V}$$

$$\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} + u_C \cdot \frac{R_1 + R}{R R_1 C} = \frac{12\,\text{V}}{R_1 C} \Rightarrow u_C(t) = \frac{R \cdot 12\,\text{V}}{R_1 + R} + A\mathrm{e}^{-(R_1+R)t/R R_1 C}$$

Begynnelsevillkoret vid $t = 0$ ger $\dfrac{R \cdot 12\,\text{V}}{R_1 + R} + A = 0$ som i sin tur ger

$$u_C(t) = \frac{R \cdot 12}{R_1 + R}(1 - \mathrm{e}^{-(R_1+R)t/R R_1 C})\,\text{V}$$

Kondensatorspänningen stiger tills den passerar referensspänningen på den ickeinverterande ingången. Då blir reläet strömlöst och kaffebryggaren stängs av. Detta inträffar då
$3,8 = \dfrac{R \cdot 12}{R_1 + R}(1 - \mathrm{e}^{-(R_1+R)t/R R_1 C})$ dvs för $\mathrm{e}^{-(R_1+R)T/R R_1 C} = 1 - \dfrac{3,8(R + R_1)}{12R}$, varur
$-\dfrac{T(R_1 + R)}{R R_1 C} = \ln 0,42 = -0,87$, som ger $C = 153\,\mu\text{F}$.

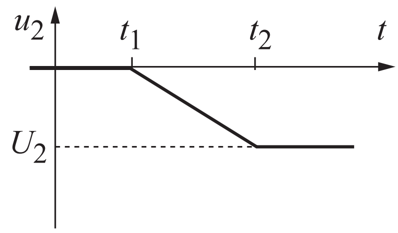
Problemet kan lösas mycket elegant mha en tvåpolsekvivalent! Är R tillräckligt litet fungerar kretsen inte alls. T.ex. blir för $R = 3,3\,\mathrm{M}\Omega$

$u_C(t) = \dfrac{R \cdot 12}{R_1 + R} = 3,4\,\mathrm{V} \leq \dfrac{R_3 \cdot 12}{R_2 + R3}\,\mathrm{V} = 3,8\,\mathrm{V}$

– –

L4.19 Accelerometern genererar en signal $u_1 = k \cdot a$ där k är en konstant.

För $t < t_1$ är $u_2 = 0$.



För $t_1 < t < t_2$ är $\dfrac{u_1}{R} = i_R = -i_C = -C\dfrac{\mathrm{d}u_2}{\mathrm{d}t}$ varur

$\dfrac{u_1}{RC} = -\dfrac{\mathrm{d}u_2}{\mathrm{d}t}$

$$u_2 = -\frac{1}{RC}\int u_1 \mathrm{d}t = -\frac{k}{RC}\int_{t_1}^{t} a\mathrm{d}t = -\frac{k}{RC}a(t - t_1)$$

För $t > t_2$ gäller $u_2 = -\dfrac{k}{RC}\displaystyle\int_{t_1}^{t_2} a\mathrm{d}t = -\dfrac{k}{RC} \cdot a \cdot (t_2 - t_1)$

Komplexa metoden

L5.2 **a** Effektivvärdet $|U| = \sqrt{\frac{1}{2}\int_0^T u^2(t)dt}$

$\frac{1}{T}\int_0^t cos^2(\omega t + \alpha)dt = \frac{1}{T}\int_0^T \frac{1}{2}(1 + \cos(2\omega t + 2\alpha))dt =$

$\frac{1}{T}\left[\frac{T}{2} + 0\right] = \frac{1}{2}$ (ober. av α!)

$|U|^2 = \frac{1}{2}\hat{U}^2$, varur $|U| = \frac{1}{\sqrt{2}}\hat{U}$

$\hat{U} = 100\,\mathrm{V}$ ger $|U| = 70,7V$

b Fasvinkeln i radianer är $\alpha = 0,7\,\mathrm{rad}$.

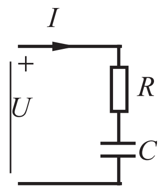
I grader blir det $\dfrac{180}{\pi}\alpha = 40°$

c Komplexa spänningen $U = |U| \cdot e^{\mathrm{j}\,\alpha} = \frac{1}{\sqrt{2}}\hat{U}e^{\mathrm{j}\,\alpha} = 70,7 \cdot e^{\mathrm{j}\,0,7}\,\mathrm{V}$

Skriven med real- och imaginärdel blir den $U = (54 + \mathrm{j}\,46)\,\mathrm{V}$

– –

L5.7a Impedansen består av två seriekopplade element: R och C.



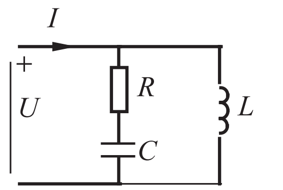
$$Z = R + \frac{1}{\mathrm{j}\,\omega C}$$

Ohms lag: $U = Z \cdot I$ ger $I = \dfrac{U}{Z}$.

$$I = \frac{U}{R + \frac{1}{\mathrm{j}\,\omega C}} = \frac{\mathrm{j}\,\omega C U}{1 + \mathrm{j}\,\omega C R}$$

Svar: $I = \dfrac{\mathrm{j}\,\omega C U}{1 + \mathrm{j}\,\omega C R}$

L5.7.b Här finns även en parallellkoppling. Totala admittansen blir



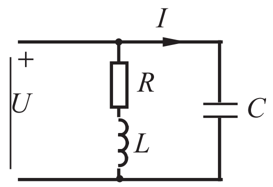
$$Y_{\mathrm{tot}} = \frac{1}{R + \frac{1}{\mathrm{j}\,\omega C}} + \frac{1}{\mathrm{j}\,\omega L} = \frac{\mathrm{j}\,\omega C}{1 + \mathrm{j}\,\omega C R} + \frac{1}{\mathrm{j}\,\omega L}$$

Ohms lag $\quad I = U \cdot Y \quad$ ger

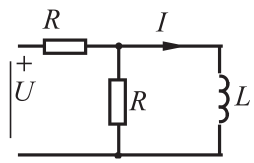
$$I = U\{\frac{\mathrm{j}\,\omega C}{1 + \mathrm{j}\,\omega C R} + \frac{1}{\mathrm{j}\,\omega L}\}$$

Svar: $I = \dfrac{\mathrm{j}\,\omega C U}{1 + \mathrm{j}\,\omega C R} + \dfrac{U}{\mathrm{j}\,\omega L}$

L5.7.c Kondensatorströmmen är $I = \mathrm{j}\,\omega C U =$ **Svar**



L5.7.d Parallellkopplingen har impedansen



$$Z_p = \frac{R \cdot \mathrm{j}\,\omega L}{R + \mathrm{j}\,\omega L}.$$

Totala impedansen

$$Z_{\mathrm{tot}} = Z_p + R = R \cdot \frac{R + \mathrm{j}\,2\omega L}{R + \mathrm{j}\,\omega L}$$

Ohms lag ger totalströmmen $I_{\mathrm{tot}} = \dfrac{U}{Z_{\mathrm{tot}}}$

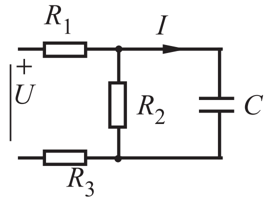
Strömgrening ger

$$I = \frac{R}{R + \mathrm{j}\,\omega L} I_{\mathrm{tot}} = \frac{R}{(R + \mathrm{j}\,\omega L)} \cdot \frac{U \cdot (R + \mathrm{j}\,\omega L)}{R \cdot (R + \mathrm{j}\,2\omega L)} = \frac{U}{R + \mathrm{j}\,2\omega L}$$

Observera att det går att förkorta! Detta gäller för många likartade problem! Underlåter man förkortningen kan uttrycken bli besvärliga!

Svar: $I = \dfrac{U}{R + \mathrm{j}\,2\omega L}$

L5.9 Parallella komponenterna (R_2 och C) har resulterande impedansen:



$$Z_2 = \frac{R_2 \cdot (1/\mathrm{j}\,\omega C)}{R_2 + (1/\mathrm{j}\,\omega C)} =$$

$$\frac{R_2}{1 + \mathrm{j}\,\omega C R_2} = \frac{R_2\,(1 - \mathrm{j}\,\omega C R_2)}{1 + (\omega C R_2)^2}$$

Totala impedansen blir

$$Z = R + \mathrm{j}\,X = R_1 + R_3 + Z_2 =$$

$$R_1 + R_3 + \frac{R_2}{1 + (\omega C R_2)^2} - \mathrm{j}\,\frac{\omega C R_2^2}{1 + (\omega C R_2)^2};$$

Svar: $R = R_2 + R_3 + \dfrac{R_2}{1 + (\omega C R_2)^2};\quad X = -\dfrac{\omega C R_2^2}{1 + (\omega C R_2)^2}$

L5.12 Parallellkopplingsformeln ger

$$Z = \frac{(R + \mathrm{j}\,\omega L)\,\frac{1}{\mathrm{j}\omega C}}{R + \mathrm{j}\,\omega L + \frac{1}{\mathrm{j}\omega C}} = \frac{R + \mathrm{j}\,\omega L}{1 - \omega^2 LC + \mathrm{j}\,\omega CR}$$

Resistansen $= \mathrm{Re}\{Z\} = \mathrm{Re}\{\dfrac{(R + \mathrm{j}\,\omega L)(1 - \omega^2 LC - \mathrm{j}\,\omega CR)}{(1 - \omega^2 LC)^2 + (\omega CR)^2)}\} =$

a) $= \dfrac{R}{N}$ där $N = (1 - \omega^2 LC)^2 + (\omega CR)^2$

Reaktansen $= \mathrm{Im}\{Z\} = \frac{1}{N}\{\omega L(1 - \omega^2 LC) - \omega CR^2\}$

b) Strömmen blir summan av två delströmmar, nämligen $\mathrm{j}\,\omega C \cdot U$ och $\dfrac{1}{R + \mathrm{j}\,\omega L}U$

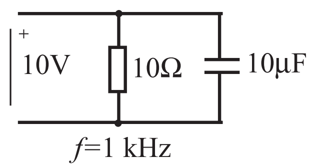
Svar: Resistansen $= \dfrac{R}{N}$, $N = (1 - \omega^2 LC)^2 + (\omega CR)^2$

Reaktansen $= \dfrac{1}{N}\,\{\omega L(1 - \omega^2 LC) - \omega CR^2\}$

Strömmen $= U\,\{\mathrm{j}\,\omega C + \dfrac{1}{R + \mathrm{j}\,\omega L}\}$

Komplex effekt

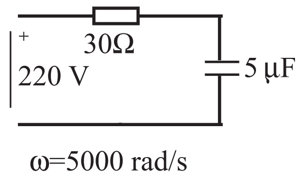
L5.14 $P = \mathrm{Re}\{UI^*\} = R|I|^2 = G|U|^2$



a) $P = G|U|^2$ ger med $G = 0,1\,\mathrm{S}$

$|U| = 10\,\mathrm{V}$, $P = \frac{100}{10}\,\mathrm{W} = 10\,\mathrm{W}$

b) $P = R|I|^2$, där $I = U/(R + \mathrm{j}\,X)$
$|U| = 220\,\mathrm{V}, R = 30\,\Omega$ och
$|X| = 1/(5000 \cdot 5 \cdot 10^{-6})\,\Omega = 40\,\Omega$ ger
$|I| = 220/\sqrt{30^2 + 40^2}\,\mathrm{A} = 4,4\,\mathrm{A}$ och
$P = 30 \cdot 4,4^2 = 580\,\mathrm{W}$



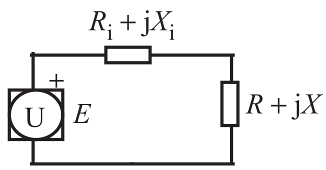
c) Använd $\sin \omega t$ som riktfas
$U = (10/\sqrt{2})\,\mathrm{V}$
$I = (0,5/\sqrt{2})\,e^{\mathrm{j}\,\pi/3}\,\mathrm{A}$
$P_S = UI^* = (5/2) \cdot e^{-\mathrm{j}\,\pi/3}\,\mathrm{W} =$
$[2,5\cos(\pi/3) - \mathrm{j}\,2,5\sin\pi/3]\,\mathrm{W} = (1,25 - \mathrm{j}\,2,16)\,\mathrm{W}$
$P = \mathrm{Re}\{P_S\} = 1,25\,\mathrm{W}$

– –

L5.16 **a)** Effekten i belastningen är
$P_S = (R + \mathrm{j}\,X)|I|^2$ där

$$I = \frac{E}{R_i + \mathrm{j}\,X_i + R + \mathrm{j}\,X} =$$

$$\frac{E}{(R + R_i) + \mathrm{j}\,(X + X_i)}$$



$$|I|^2 = \frac{|E|^2}{(R + R_i)^2 + (X + X_i)^2} \text{ ger}$$

$$P_S = \frac{|E|^2(R + \mathrm{j}\,X)}{(R + R_i)^2 + (X + X_i)^2};$$

b) Effektfaktorn för belastningen är $\lambda = \dfrac{P}{|P_s|} = \dfrac{R}{\sqrt{R^2 + X^2}}$

c) Verkningsgraden η är lika med $\dfrac{P}{P_{\text{total}}}$ där
$P_{\text{total}} = (R + R_i)|I|^2$ ger

$$\eta = \frac{R}{R + R_i}$$

d) $P_{\max}$ får man då

$$\frac{R}{(R + R_i)^2 + (X + X_i)^2} = f(R, X) \text{ är maximum .}$$

$$\frac{\partial P}{\partial R} = 0 \rightarrow \frac{1}{R} - \frac{2(R + R_i)}{(R + R_i)^2 + (X + X_i)^2} = 0$$

$$\frac{\partial P}{\partial X} = 0 \rightarrow \frac{2(X + X_i)}{N} = 0$$

Ur sista ekv. får man $X = -X_i$.

Insätts detta i övre ekv. blir $R = R_i$.

Max.effekt fås då $R + \mathrm{j}\, X = R_i - \mathrm{j}\, X_i$, dvs då $Z = Z_i^*$

$$P_{\max} = \frac{|E|^2}{4R_i}$$

(Verkningsgraden är nu 50%)

– –

L5.20 a) Skenbara effekten är $|P_S| = |U| \cdot |I|$

Här är $|P_S| = 10\,\mathrm{V} \cdot 6\,\mathrm{A} = 60\,\mathrm{VA}$

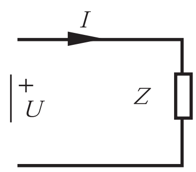
b) Aktiva effekten är $P = \mathrm{Re}\{UI^*\}$

$$Z = \frac{U}{I} \text{ ger } \quad I = \frac{U}{Z} = \frac{U}{|Z|}\, e^{-\mathrm{j}\,\arg\{Z\}}$$

$\arg\{Z\} = \pi/4$ ger

$P = \mathrm{Re}\{UI^*\} = |U| \cdot |I| \cos(\pi/4) = 42\,\mathrm{W}$

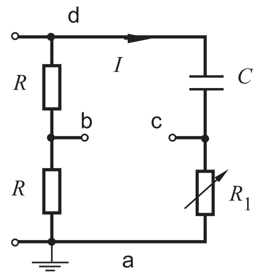
c) Effektfaktorn är $\lambda = \dfrac{P}{|P_S|} = \cos\varphi = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = 0,71$

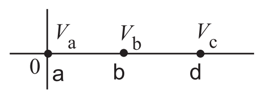


Grafiska metoder

L5.23 Den sökta spänningen U_1 är potentialskillnaden $V_\mathrm{c} - V_\mathrm{b}$. Rita alltså ett potentialdiagram, och sätt $V_\mathrm{a} = 0$. Låt dessutom U vara riktfas (reell), vilket innebär att V_d ligger på reella axeln med avståndet $|U|$ från origo. Spänningarna U_ba och U_db är lika stora och ligger i fas. ”Punkten” b ligger alltså mitt emellan a och d i potentialdiagrammet.

Potentialen V_b har alltså värdet $V_\mathrm{b} = \frac{1}{2}U$ (reellt).



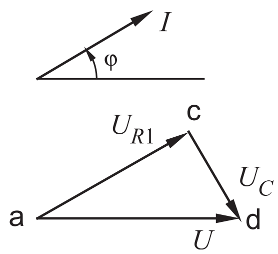


Så till den högra kretsen. Där är R_1 och C seriekopplade. Låt strömmen vara I . Den ligger före spänningen U eftersom det är en kapacitiv krets, se figuren. Då blir

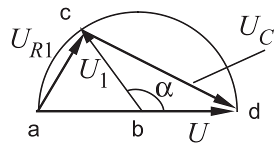
$U_{R1} = U_\mathrm{ca} = R_1 \cdot I$ och

$$U_C = U_\mathrm{dc} = \frac{1}{\mathrm{j}\,\omega C} I = \frac{I}{\omega C} \cdot \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\,\pi/2}.$$

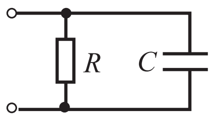
U_{R1} och U_C är vinkelräta mot varandra, och summan = U. Det måste bli som figuren visar (med den antagna strömmen I).



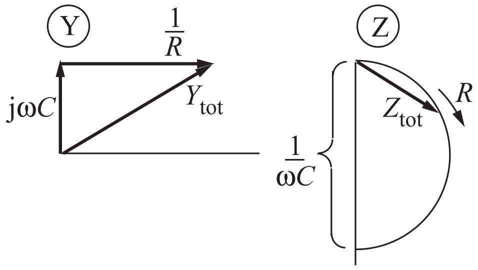
Då R_1 varierar, kommer vinkeln φ att variera. Dock kommer <u>alltid</u> vinkeln vid c att vara $\pi/2$, och punkten c ligger på en halvcirkelbåge med ad som diameter.
Sökt spänning $U_{\mathrm{cb}} = V_{\mathrm{c}} - V_{\mathrm{b}}$ är tydligen ”radien ” i cirkeln.
Radien är konstant, och vinkeln varierar mellan π och 0!



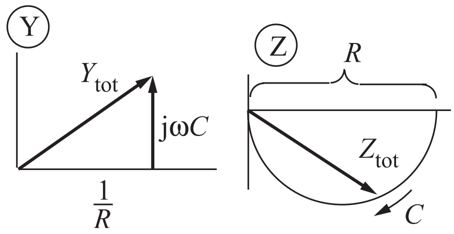
L5.24 Här är grenarna parallellkopplade! Välj då ett admittansdiagram först!



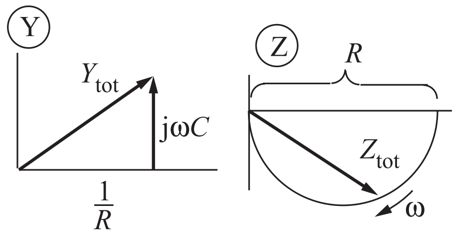
a) Orten för Y_{tot} blir, då R varierar, en horisontell rät linje på avståndet ωC från reella axeln. $Z_{\mathrm{tot}} = 1/Y_{\mathrm{tot}}$ blir en halvcirkel med diametern $1/\omega C$, som går genom origo och punkten $Z = 0 - \mathrm{j}\,\dfrac{1}{\omega C}$



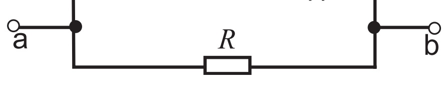
b) Orten för Y_{tot} blir, då C varierar, en vertikal rät linje på avståndet $1/R$ från reella axeln. $Z_{\mathrm{tot}} = 1/Y_{\mathrm{tot}}$ blir en halvcirkel med diametern R, som går genom origo och punkten $Z = R + \mathrm{j}\,0$



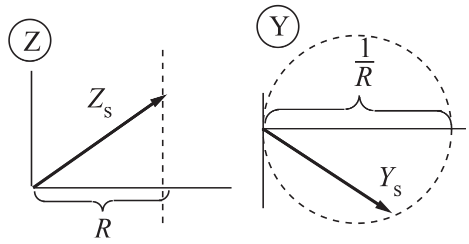
c) Fall b och c är ”identiska”, då ω och C endast förekommer i kombinationen ωC.



L5.28 Här är det två parallella grenar! Använd admittanser! Börja dock med seriekretsens impedansdiagram. Orten blir en rät linje, parallell med imaginära axeln och på avståndet R från denna.

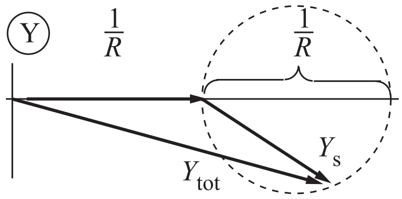


Admittansen för detta är $Y_S = \dfrac{1}{Z_S}$, som ”är” en cirkel, som går genom origo och punkten $Y_S = \dfrac{1}{R}$. Se fig.
Cirkelns diameter sammanfaller med reella axeln!

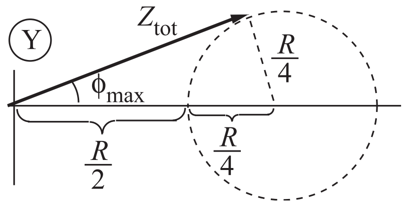


Totala admittansen är nu $\dfrac{1}{R} + Y_s = Y_{\text{tot}}$.

Och detta är cirkeln flyttad $\dfrac{1}{R}$ längs reella axeln.



Detta innebär att $Z_{\text{tot}} = \dfrac{1}{Y_{\text{tot}}}$ blir en cirkel med centrum på reella axeln och som går genom punkterna $\frac{R}{2}$ och R.



Maximala argumentet (vinkeln) för impedansen Z_{tot} får man, då visarspetsen för Z_{tot} hamnar i den punkt på ortscirkeln, som är tangeringspunkten för en rät linje genom origo. För max-vinkeln $\phi_{\max}$ erhåller man $\quad \sin\phi_{\max} = \dfrac{R/4}{3R/4} = \dfrac{1}{3}$

$$\phi_{\max} = \arcsin\frac{1}{3} \simeq 0,34\,\text{rad} \simeq 19,5^\circ$$

Svar: $\quad \phi_{\max} = 0,34$ rad

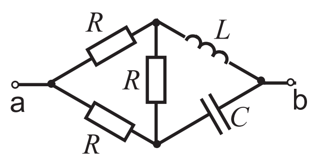
– –

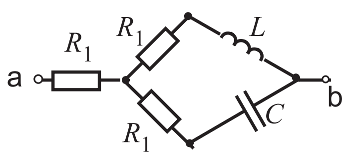
Stjärn-polygon-transformation

L5.32 Problemet blir enklare om de tre resistanserna transformeras till ett Y. Vi använder alltså $\Delta - Y$-transformationen.

Enligt formeln $Z_1 = \dfrac{Z_{12} \cdot Z_{13}}{Z_{12} + Z_{13} + Z_{23}}$ får man $\quad R_1 = \dfrac{R}{3}$

Totala impedansen fås från R_1 i serie med två parallellkopplade grenar.





$$\begin{aligned} Z_{\text{tot}} &= R_1 + \frac{(R_1 + \mathrm{j}\,\omega L)(R_1 + 1/\mathrm{j}\,\omega C)}{2R_1 + \mathrm{j}\,\omega L + 1/\mathrm{j}\,\omega C} \\ &= R_1 + \frac{R_1^2 + L/C + \mathrm{j}\,(\omega L - 1/\omega C)R_1}{2R_1 + \mathrm{j}\,(\omega L - 1/\omega C)} \end{aligned}$$

Detta blir ober. av ω om $\dfrac{R_1^2 + L/C}{2R_1} = R_1 \cdot \dfrac{L}{L} = R_1 \cdot \dfrac{1/C}{1/C}$

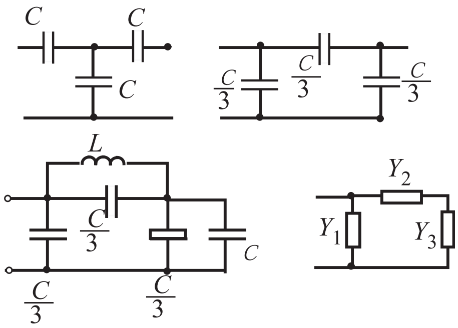
dvs om $L/C = R_1^2 = R^2/9$

$Z_{\text{tot}} = R_1 + R_1 = 2R_1 = \frac{2}{3}R$

Svar: $\quad \dfrac{L}{C} = \dfrac{R^2}{9}; \qquad Z_{\text{tot}} = \dfrac{2}{3}R$

- -

L5.33 Använd Y-D transf. på de Y-kopplade kondensatorerna.
Motsvarande Δ-nät får kapacitanserna $C/3$.
Detta inses om man tillämpar formeln



$$Z_{12} = \left(\frac{1}{\mathrm{j}\,\omega C}\right)^2 \cdot \mathrm{j}\,3\omega C = \frac{1}{\mathrm{j}\,\omega C/3}$$

$$Z_{12} = 3Z_1 \quad \text{OBS!}$$

Det resulterande Y-nätet får då admittanserna

$$Y_1 = \mathrm{j}\,\omega C/3$$

$$Y_2 = \mathrm{j}\,\omega C/3 + \frac{1}{\mathrm{j}\,\omega L}$$

$$Y_3 = \mathrm{j}\,\omega C \cdot 4/3$$

Seriekoppl. av Y_2 och Y_3 ger

$$Y_{2+3} = \frac{Y_2 Y_3}{Y_2 + Y_3} = \frac{\mathrm{j}\,\omega C \cdot 4/3 \cdot (\omega C/3 - 1/\omega L) \cdot \mathrm{j}}{\mathrm{j}\ [\omega C \cdot 5/3 - 1/\omega L]}$$

$$Y_{\text{tot}} = Y_1 + Y_{2+3} = \mathrm{j}\,(\omega C/3) \left[1 + \frac{4(\omega C/3 - 1/\omega L)}{5\omega C/3 - 1/\omega L}\right]$$

$$= \mathrm{j}\,(\omega C/3) \cdot \frac{(9\omega C/3 - 5/\omega L)}{(5\omega C/3 - 1/\omega L)}$$

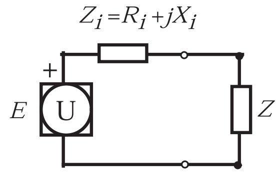
$$Y_{\text{tot}} = \infty \text{ för } \begin{cases} 5\omega C/3 = 1/\omega L & \text{dvs } \omega = \sqrt{\dfrac{3}{5LC}} \\ \omega = \infty \end{cases}$$

$$Y_{\text{tot}} = 0 \text{ för } \begin{cases} 9\omega C/3 = 5/\omega L & \text{dvs } \omega = \sqrt{\dfrac{5}{3LC}} \\ \omega = 0 \end{cases}$$

Svar: $\quad Z = 0 \text{ för } \begin{cases} \omega = \sqrt{\dfrac{3}{5LC}} \\ \omega = \infty \end{cases} \qquad Z = \infty \text{ för } \begin{cases} \omega = \sqrt{\dfrac{5}{3LC}} \\ \omega = 0 \end{cases}$

L5.37 I första fallet är $Z = R$

Maximal effekt får man i R då $R = |Z_\mathrm{i}| = \sqrt{R_\mathrm{i}^2 + X_\mathrm{i}^2}$



Bevis:

$$P = \frac{R|E|^2}{(R+R_i)^2 + X_\mathrm{i}^2} = |E|^2 \cdot \frac{1}{R + \frac{R_\mathrm{i}^2 + X_\mathrm{i}^2}{R} + 2R_\mathrm{i}}$$

Nämnaren har minimum, då

$$R = \frac{(R_\mathrm{i}^2 + X_\mathrm{i}^2)}{R}$$

$$(\frac{\partial}{\partial R}\{R + \frac{a^2}{R} + \text{konstant}\} = 0 \text{ ger } R = \pm a).$$

I exemplet är

$$R_\mathrm{i}^2 + X_\mathrm{i}^2 = [R^{(1)}]^2 = (100\,\Omega)^2$$

I andra fallet är $Z = R_2 + \mathrm{j}\,X_2$,där både R_2 och X_2 är variabla.

Maximal effekt erhålls vid anpassning, dvs då $R_\mathrm{i} = R_2$ och $X_\mathrm{i} = -X_2$.

Enligt lydelsen är $R_2 = 50\,\Omega$, varur $R_\mathrm{i} = 50\,\Omega$

Alltså blir

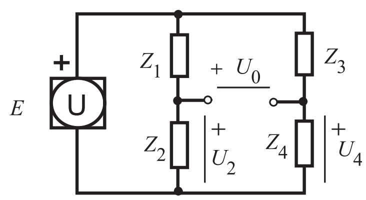
$$X_\mathrm{i}^2 = (100\,\Omega)^2 - (50\,\Omega)^2 = (50\,\Omega)^2 \cdot 3, \quad X_\mathrm{i} = \pm 50\sqrt{3}\,\Omega$$

(-tecknet inte bra i detta fall, eftersom man fick maximal effekt med tillkopplad kondensator).

Svar: $\qquad Z_\mathrm{i} = (50 + \mathrm{j}\,50\sqrt{3})\,\Omega$

Tvåpolekvivalenter

L5.43 Strömmen i vänstra grenen är



$$I_v = \frac{E}{Z_1 + Z_2}$$

Strömmen i högra grenen är

$$I_h = \frac{E}{Z_3 + Z_4}$$

Den sökta spänningen blir

$$U_0 = U_2 - U_4 = Z_2 I_v - Z_4 I_h = [\frac{Z_2}{Z_1 + Z_2} - \frac{Z_4}{Z_3 + Z_4}]\,E \;\; = \textbf{Svar a)}$$

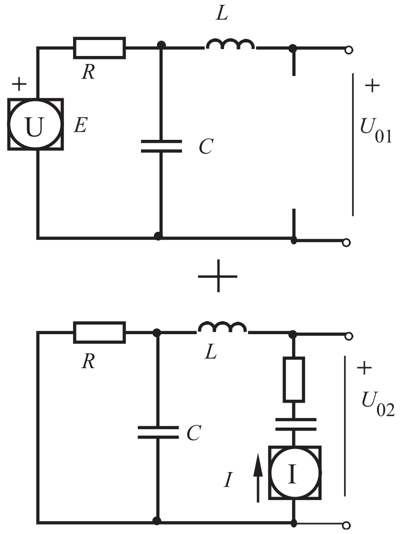
Vid balans är $U_0 = 0$ vilket ger

$$[\frac{Z_2}{Z_1 + Z_2} - \frac{Z_4}{Z_3 + Z_4}] = 0$$

Härur får man bryggvillkoret

$$\frac{Z_1}{Z_2} = \frac{Z_3}{Z_4} \qquad = \textbf{Svar b)}$$

L5.47 Beräkna tomgångsspänningen m.h.a. superposition!



$$U_{01} = \frac{1/\mathrm{j}\,\omega C}{R + 1/\mathrm{j}\,\omega C} E = \frac{E}{1 + \mathrm{j}\,\omega CR}$$

$$U_{02} = [\mathrm{j}\,\omega L + \frac{R \cdot (1/\mathrm{j}\,\omega C)}{R + 1/\mathrm{j}\,\omega C}] \cdot I =$$

$$= [\mathrm{j}\,\omega L + \frac{R}{1 + \mathrm{j}\,\omega CR}] I$$

$E = 100\,\mathrm{V}$, $I = \sqrt{2}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\,\pi/4}\,\mathrm{A} = (1 - \mathrm{j}\,)\,\mathrm{A}$,

$R = 200\,\Omega$, $\omega C = 10^{-2}\,\mathrm{S}$, $\omega L = 110\,\Omega$ ger

$$U_{01} = \frac{100}{1 + \mathrm{j}\,2}\,\mathrm{V} = 20(1 - \mathrm{j}\,2)\,\mathrm{V}$$

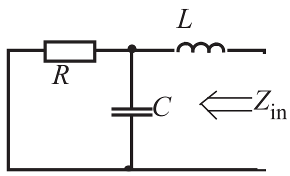
$$U_{02} = [\mathrm{j}\,110 + \frac{200}{1 + \mathrm{j}\,2}] \cdot (1 - \mathrm{j}\,)\,\mathrm{V}$$

$$= [40 + \mathrm{j}\,30](1 - \mathrm{j}\,)\,\mathrm{V} = (70 - \mathrm{j}\,10)\,\mathrm{V}$$

$$U_0 = U_{01} + U_{02} = (90 - \mathrm{j}\,50)\,\mathrm{V} = 103\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\ \arctan(5/9)}\,\mathrm{V}$$

$$u_0(t) = \mathrm{Re}\,\{\sqrt{2} U_0 \mathrm{e}^{\mathrm{j}\,\omega t}\} = 146\cos(100t/[\mathrm{s}] - 0,51)\,\mathrm{V}$$

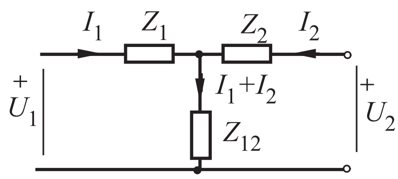
$$Z_{\mathrm{in}} = \mathrm{j}\,\omega L + \frac{R}{1 + \mathrm{j}\,\omega CR} = (40 + \mathrm{j}\,30)\,\Omega$$



Svar: Thévenin-ekvivalenten har
$u_0 = 146\cos(100t/[\mathrm{s}] - 0,51)\,\mathrm{V}$.
Vid denna frekvens är inre impedansen $(40 + \mathrm{j}\ 30)\,\Omega$.

Tvåporten

L5.51 Fyrpolen kan ersättas av ett nät med tre impedanser, ett T-nät.



$$U_1 = 6I_1 + (3 - \mathrm{j}\,3)I_2$$

$$U_2 = (3 - \mathrm{j}\,3)I_1 + (3 + \mathrm{j}\,)I_2$$

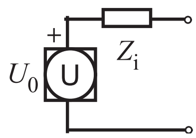
a) Ur fig fås

$$U_1 = Z_1 I_1 + Z_{12}(I_1 + I_2) = (Z_1 + Z_{12})I_1 + Z_{12}I_2$$
$$U_2 = Z_2 I_2 + Z_{12}(I_1 + I_2) = Z_{12}I_1 + (Z_2 + Z_{12})I_2$$

Identifiering ger

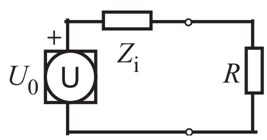
$$Z_{12} = 3 - \mathrm{j}\,3,\ Z_1 = 6 - (3 - \mathrm{j}\,3) = 3 + \mathrm{j}\,3$$
$$Z_2 = (3 + \mathrm{j}\,) - (3 - \mathrm{j}\,3) = \mathrm{j}\,4$$

b) Kretsens tvåpolekvivalent med avseende på cd blir enligt figuren, där



$$U_0 = (Z_{12}/\,(Z_1 + Z_{12}))U_1 \text{ , varur}$$
$$|U_0| = (1/\sqrt{2}) \cdot 2\,\mathrm{V} = \sqrt{2}\,\mathrm{V}$$
$$Z_\mathrm{i} = Z_2 + \frac{Z_1 \cdot Z_{12}}{Z_1 + Z_{12}} =$$
$$= (\mathrm{j}\,4 + \frac{18}{6})\,\Omega = (3 + \mathrm{j}\,4)\,\Omega$$

Max eff. fås då $R = |Z_\mathrm{i}|$ dvs $R = 5\,\Omega$



Detta visas genom att man deriverar uttrycket för aktiv effekt med avseende på R. Samma metod som används i kompendiet alltså.
Genomför detta bevis!

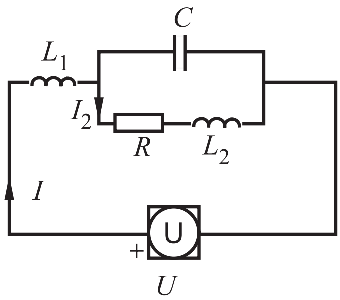
$$P = \frac{R|U_0|^2}{|R + Z_1|^2} = \frac{5 \cdot 2}{8^2 + 4^2}\,\mathrm{W} = \frac{10}{80}\,\mathrm{W} = 1/8\,\mathrm{W}$$

Svar: $P_\mathrm{max} = 1/8\,\mathrm{W}$

– –

Frekvensoberoende nät

L5.53 Spänningen över resistansen blir $U_R = RI_2$.



Strömgrening ger $I_2 = I \cdot \dfrac{1/\mathrm{j}\,\omega C}{R + \mathrm{j}\,\omega L_2 + 1/\mathrm{j}\,\omega C} =$

$I \cdot \dfrac{1}{1 - \omega^2 L_2 C + \mathrm{j}\,\omega CR}.$

Totalströmmen I får man ur $I = \dfrac{U}{Z_\mathrm{tot}}$, där

$$Z_\mathrm{tot} = \mathrm{j}\,\omega L_1 + \frac{(R + \mathrm{j}\,\omega L_2) \cdot 1/\mathrm{j}\,\omega C}{R + \mathrm{j}\,\omega L_2 + 1/\mathrm{j}\,\omega C} = \mathrm{j}\,\omega L_1 + \frac{R + \mathrm{j}\,\omega L_2}{1 - \omega^2 L_2 C + \mathrm{j}\,\omega CR} =$$
$$\frac{R + \mathrm{j}\,\omega[L_1(1 - \omega^2 L_2 C) + L_2] - \omega^2 L_1 CR}{1 - \omega^2 L_2 C + \mathrm{j}\,\omega CR}$$

Kombinera detta! Man får

$$U_R = \frac{R}{(1-\omega^2 L_2 C + \mathrm{j}\,\omega C R)} \cdot \frac{U\cdot(1-\omega^2 L_2 C + \mathrm{j}\,\omega C R)}{\{R(1-\omega^2 L_1 C) + \mathrm{j}\,[\omega L_1(1-\omega^2 L_2 C) + \omega L_2]\}} =$$

$$\frac{U\cdot R}{R(1-\omega^2 L_1 C) + \mathrm{j}\,\omega L_2(1-\omega^2 L_1 C) + \mathrm{j}\,\omega L_1}$$

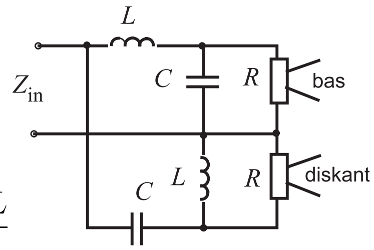
U_R blir oberoende av L_2 om $\omega^2 L_1 C = 1$.

Detta ger $U_R = \dfrac{U\cdot R}{\mathrm{j}\,\omega L_1} = \dfrac{UR\sqrt{C}}{\mathrm{j}\,\sqrt{L_1}}$

Svar: Med $\omega = \dfrac{1}{\sqrt{L_1 C}}$ blir $U_R = -\mathrm{j}\,U\cdot R\sqrt{\dfrac{C}{L_1}}$, oberoende av L_2.

– –

L5.54 Diskant- och basdelen är parallellkopplade.
Kalla motsvarande impedanser Z_d och Z_b.
Man får



$$Z_\mathrm{d} = \frac{1}{\mathrm{j}\,\omega C} + \frac{R\cdot \mathrm{j}\,\omega L}{R+\mathrm{j}\,\omega L} = \frac{R(1-\omega^2 LC)+\mathrm{j}\,\omega L}{\mathrm{j}\,\omega C(R+\mathrm{j}\,\omega L)}$$

$$Z_\mathrm{b} = \mathrm{j}\,\omega L + \frac{R\cdot 1/\mathrm{j}\,\omega C}{R+1/\mathrm{j}\,\omega C} = \frac{R(1-\omega^2 LC)+\mathrm{j}\,\omega L}{1+\mathrm{j}\,\omega CR}$$

Parallellkoppling! Addera admittanser!

$$\begin{aligned} Y_\mathrm{tot} &= Y_\mathrm{d} + Y_\mathrm{b} = \frac{1+\mathrm{j}\,\omega CR\cdot 2 - \omega^2 LC}{R(1-\omega^2 LC)+\mathrm{j}\,\omega L} \\ &= \frac{1}{R}\cdot\frac{(1-\omega^2 LC)+\mathrm{j}\,2\omega CR}{(1-\omega^2 LC)+\mathrm{j}\,\omega L/R} \end{aligned} \quad !$$

Y_tot blir oberoende av frekvensen. om $\dfrac{\mathrm{Re}\{\text{tälj}\}}{\mathrm{Re}\{\text{nämn}\}} = \dfrac{\mathrm{Im}\{\text{tälj}\}}{\mathrm{Im}\{\text{nämn}\}} =$ konst.

$Y_\mathrm{tot} = \dfrac{1}{R}$ om $\dfrac{1-\omega^2 LC}{1-\omega^2 LC} = \dfrac{2\omega CR}{\omega L/R} = \dfrac{2CR^2}{L} = 1$; Härur får man $2R^2 = \dfrac{L}{C}$

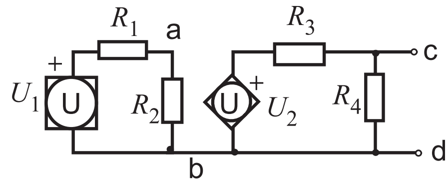
$Y_\mathrm{tot} = \dfrac{1}{R}$ ger $Z_\mathrm{tot} = Z_\mathrm{in} = R$

Svar: $Z_\mathrm{in} = R$ för alla frekvenser, då $2R^2 = \dfrac{L}{C}$.

– –

Beroende generatorer

L5.57 Betrakta den vänstra kretsen. Spänningsdelning ger $U_{\mathrm{ab}} = \dfrac{R_2}{R_1 + R_2} U_1$ För högra kretsen får vi:

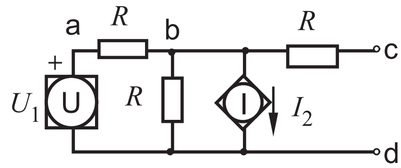


$$U_{\mathrm{cd}} = \frac{R_4}{R_3 + R_4} U_2 \qquad U_2 = kU_{\mathrm{ab}} \text{ ger}$$

$$U_{\mathrm{cd}} = k \cdot \frac{R_4}{R_3 + R_4} \cdot \frac{R_2}{R_1 + R_2} \cdot U_1 \ = \textbf{Svar}$$

– –

L5.59 **a)** Låt cd vara öppet (obelastat). Spänningen mellan c och d är då densamma som spänningen över strömgeneratorn.
Inför nodpotentialen V_{b} (och sätt $V_{\mathrm{d}} = 0$), varvid Kirchhoffs strömlag ger



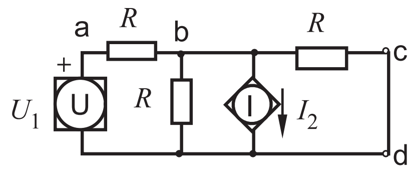
$$(U_1 - V_{\mathrm{b}})/R = V_{\mathrm{b}}/R + I_2$$

$$I_2 = g_{\mathrm{m}}(U_1 - V_{\mathrm{b}}) \text{ enl. text}$$

$$U_1(1/R - g_{\mathrm{m}}) = V_{\mathrm{b}}(2/R - g_{\mathrm{m}})$$

$$V_b = \frac{1 - g_{\mathrm{m}}R}{2 - g_{\mathrm{m}}R} U_1 = U_0 = \text{ tomgångsspänningen} \quad = \textbf{Svar a)}$$

b) Kortslut cd! Sätt nodpotentialen i b till V



$$(U_1 - V)/R = V/R + I_2 + V/R$$

$$I_2 = g_{\mathrm{m}}(U_1 - V)$$

varur

$$V = \frac{1 - g_{\mathrm{m}}R}{3 - g_{\mathrm{m}}R} U_1$$

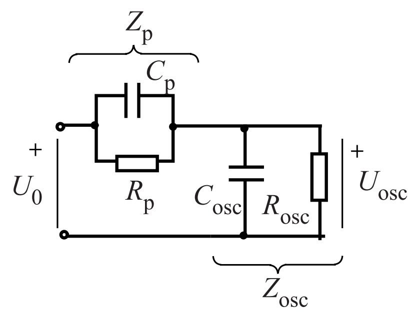
$$I_{\mathrm{k}} = \frac{V}{R} = \frac{U_1}{R} \cdot \frac{1 - g_m R}{3 - g_m R}$$

Inre impedansen $R_0 = \dfrac{U_0}{I_k} = R\,\dfrac{3 - g_{\mathrm{m}}R}{2 - g_{\mathrm{m}}R}$ $=$**Svar b)**

Mättillämpningar

L6.1 I en induktiv krets ligger spänningen **före** strömmen i fas. Detta innebär att kurvan till vänster är spänningen.
Vi avläser då att $\hat{U}$ = 3,5 rutor och $\hat{I}$ = 3 rutor.
Inställningen på kanal A, 5 V/DIV ger då tillsammans med probens dämpning den uppmätta spänningens toppvärde $\hat{U} = 10 \cdot 3,5 \cdot 5\,\text{V}{=}175\,\text{V}$
Kanal B, med $0,2\,\text{V/DIV}$, redovisar en inspänning på $0,2 \cdot 3,0\,\text{V} = 0,6\,\text{V}$. Med hänsyn tagen till strömprobens data ger detta strömmens amplitud, dvs $\hat{I} = 0,6\,\text{A}$.
Periodtiden avläses till 6,7 rutor, vilket med tidbasen $0,2\,\text{ms/DIV}$ ger $T = 1,34\,\text{ms}$.
Fasförskjutningen är ungefär en ruta $= 0,2\,\text{ms}$, och detta svarar mot $\varphi = \dfrac{0,2}{1,34} \cdot 2\pi\,\text{rad}$ $= 0,94\,\text{rad}$.
Aktiva effekten P blir då
$P = \frac{1}{2}\hat{U}\hat{I}\,\cos\varphi = 31,1\,\text{W}$
Svar: $\hat{I} = 0,6\,\text{A}$ $\quad \varphi = 0,94\,\text{rad}$ $\quad P = 31\,\text{W}$

L6.2 Proben skall ha en impedans på $9Z_{\text{osc}}$ för att man skall erhålla en spänningsdelning 1:10. Detta innebär, att



$R_p = 9\,\text{M}\Omega \qquad C_p = (27/9)\,\text{pF} = 3\,\text{pF}$
Spänningsdelning ger spänningsförhållandet

$$\frac{U_{\text{osc}}}{U_0} = \frac{Z_{\text{osc}}}{Z_p + Z_{\text{osc}}} = \frac{Y_p}{Y_{\text{osc}} + Y_p} = \frac{1 + \text{j}\,\omega C_p R_p}{1 + (R_p/R_{\text{osc}}) + \text{j}\,\omega(C_{\text{osc}} + C_p)R_p}$$

För oscilloskopet med $1\,\text{M}\Omega$, $33\,\text{pF}$ får man $(R_p/R_{\text{osc}}) = 9$ och $(C_{\text{osc}} + C_p)R_p = 324$, vilket ger

$$\frac{U_{\text{osc}}}{U_0} = \frac{1}{10} \cdot \frac{1 + \text{j}\,\omega \cdot 27 \cdot 10^{-6}}{1 + \text{j}\,\omega \cdot 32,4 \cdot 10^{-6}}$$

Uttrycket för beloppet av spänningsförhållandet, som söks, blir

$$\left|\frac{U_{\text{osc}}}{U_0}\right| = \frac{1}{10} \cdot \sqrt{\frac{1 + [\omega \cdot 27 \cdot 10^{-6}]^2}{1 + [\omega \cdot 32,4 \cdot 10^{-6}]^2}}$$

a) $f = 1\,\text{kHz}$ ger

$$\left|\frac{U_{\text{osc}}}{U_0}\right| = \frac{1}{10} \cdot 0,99\,, \quad \text{dvs ett fel på cirka 1\%.}$$

b) $f = 100\,\text{kHz}$ ger

$$\left|\frac{U_{\text{osc}}}{U_0}\right| = \frac{1}{10} \cdot 0,83\,, \quad \text{dvs ett fel på 17\%.}$$

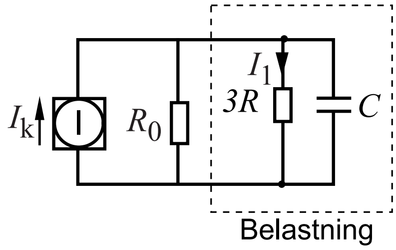
Blandade övningsexempel

L7.1 Kirchhoffs strömlag och strömgrening ger

$$I_1 = \frac{I}{2} - \frac{\mathrm{j}\,\omega C}{\mathrm{j}\,\omega C + (1/R_1)}\, I = \frac{I}{2}\left[\frac{(1/R_1) - \mathrm{j}\,\omega C}{(1/R_1) + \mathrm{j}\,\omega C}\right] = \frac{I}{2}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\,2\arctan\,\omega C R_1}$$

Svar: $|\frac{I_1}{I}| = \frac{1}{2}$, $\arg\{I\} = \alpha_1 = -2\arctan\,\omega C R_1 \;\; 0 > \alpha_1 > -\pi$

L7.4 Gör om generatordelen till en strömekvivalent. Där blir



$$I_k = \frac{\hat{I}}{\sqrt{2}} + \frac{\hat{U}\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\,\varphi}/\sqrt{2}}{2R} = \frac{1}{2\sqrt{2}\,R}\,[\hat{I}\cdot 2R + \hat{U}\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\,\varphi}]$$

$R_0 = 2R \quad Y_0 = G_0 = \frac{1}{2R}$

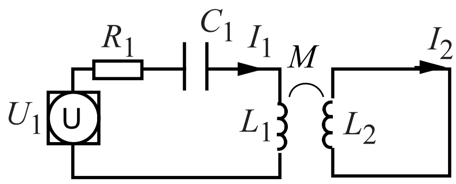
Strömdelning ger

$$\frac{I_1}{I_k} = \frac{(1/3R)}{(1/2R) + (1/3R) + \mathrm{j}\,\omega C} = \frac{2}{5 + \mathrm{j}\,6\omega C R}$$

Aktiva effekten blir $3R_1|I_1|^2 =$

$$\frac{4\cdot 3R\cdot |I_k|^2}{25 + 36\omega^2 C^2 R^2} = \frac{3(4R^2\hat{I}^2 + \hat{U}^2 + 4R\hat{I}\hat{U}\,\cos\varphi)}{2R(25 + 36\omega^2 C^2 R^2)}$$ **=Svar**

L7.6 Lufttransformatorns formler ger



$$\begin{cases} U_1 = & (R_1 + \mathrm{j}\,\omega L_1 + 1/\mathrm{j}\,\omega C_1)\, I_1 + \mathrm{j}\,\omega M\, I_2 \\ 0 = & \mathrm{j}\,\omega M\, I_1 + \mathrm{j}\,\omega L_2\, I_2 \end{cases}$$

Eliminera I_1 : $\quad I_1 = -\frac{L_2}{M}\, I_2$

$$U_1 = I_2\left\{\mathrm{j}\,\omega M - \frac{L_2}{M}\,(R_1 + \mathrm{j}\,\omega L_1 + 1/\mathrm{j}\,\omega C_1)\right\} =$$

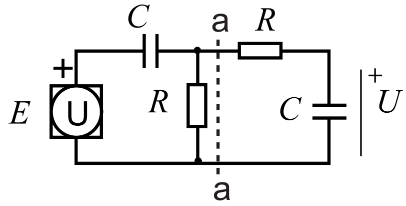
$$\mathrm{j}\,\omega M I_2\left\{1 - \frac{L_1 L_2}{M^2} + \frac{L_2}{\omega^2 C_1 M^2} + \mathrm{j}\,\frac{L_2 R_1}{\omega M^2}\right\}$$

I_2 har maximum då $|\{\,...\,\}|$ har minimum, vilket inträffar för

$$1 - \frac{L_1 L_2}{M^2} + \frac{L_2}{\omega^2 C_1 M^2} = 0 \quad \text{dvs} \quad \frac{1}{\omega C_1} = \omega L_1 - \frac{\omega^2 M^2}{\omega L_2}$$

$$\left.\begin{array}{l} \text{Insatta talvärden ger } C_1 = 110\,\mathrm{pF} \\ |I_2|_{\max} = \dfrac{|U_1|}{|\mathrm{j}\,\omega M|}\cdot\dfrac{M^2\omega}{L_2 R_1} = 64\,\mathrm{mA} \end{array}\right\} \;\; \mathbf{= Svar}$$

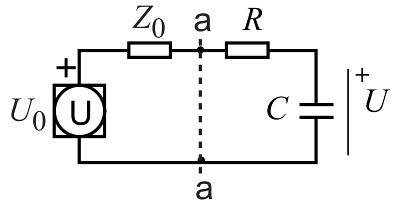
L7.8 Gör en tvåpolekvivalent vid aa. Då blir



$$U_0 = \frac{R}{R+1/\mathrm{j}\,\omega C}\,E = \frac{\mathrm{j}\,\omega CR}{1+\mathrm{j}\,\omega CR}\,E$$

$$Z_0 = \frac{R\cdot(1/\mathrm{j}\,\omega C)}{R+1/\mathrm{j}\,\omega C} = \frac{R}{1+\mathrm{j}\,\omega CR}$$

Spänningsdelning ger nu direkt ett uttryck på spänningen U



$$U = \frac{1/\mathrm{j}\,\omega C}{Z_0+R+1/\mathrm{j}\,\omega C}\,U_0 =$$

$$\frac{1}{1+\mathrm{j}\,\omega CR+\frac{\mathrm{j}\,\omega CR}{1+\mathrm{j}\,\omega CR}}\cdot\frac{\mathrm{j}\,\omega CR}{1+\mathrm{j}\,\omega CR}\cdot E =$$

$$\frac{\mathrm{j}\,\omega CR}{1+\mathrm{j}\,3\omega CR+(\mathrm{j}\,\omega CR)^2}\,E =$$

$$\frac{1}{3+\mathrm{j}\,\omega CR+(1/\mathrm{j}\,\omega CR)}\,E$$

Sätter vi $1/RC = \omega_0$ erhåller vi efter utbrytning av faktorn 3

$$\frac{U}{E} = \frac{1}{3[1+\mathrm{j}\,\frac{1}{3}(\frac{\omega}{\omega_0}-\frac{\omega_0}{\omega})]}$$

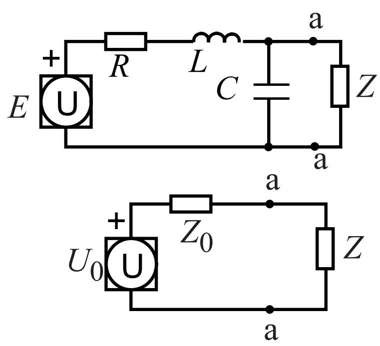
vilket är ett uttryck på önskad form.

Vi känner igen formen på detta uttryck från teorin om resonanskretsar och kan då få ett godhetstal $Q = 1/3$. Relativa bandbredden är som bekant

$$\frac{\Delta\omega}{\omega_0} = \frac{1}{Q} = \frac{\Delta f}{f_0}\text{, varur}$$

$$\Delta f = \frac{1}{2\pi}\,\Delta\omega = \frac{3}{2\pi RC} = \quad \textbf{Svar}$$

L7.11 Vid resonans är $I_\mathrm{r} = E/R$ och $\omega_0 L = 1/\omega_0 C$



Godhetstalet blir

$$Q_0 = \omega_0 L/R\ = 1/\omega_0 CR = \frac{\sqrt{L/C}}{R}$$

För tvåpolekvivalenten gäller för $\omega = \omega_0$

$$\begin{aligned} U_0 &= \frac{1/\mathrm{j}\,\omega_0 C}{R}\,E = \frac{Q_0 E}{\mathrm{j}} \\ Z_0 &= \frac{(1/\mathrm{j}\,\omega_0 C)\,(R + \mathrm{j}\,\omega_0 L)}{R} \\ &= \frac{L}{CR} - \mathrm{j}\,\frac{1}{\omega_0 C} = R\,[Q_0^2 - \mathrm{j}\,Q_0] \end{aligned}$$

Vid anpassning skall $Z = Z_0^* = R\,[Q_0^2 + \mathrm{j}\,Q_0]$

Maximal aktiv effekt blir

$$P_\mathrm{max} = \frac{|U_0|^2}{4R_0} = \frac{E^* I_\mathrm{r}}{4}$$

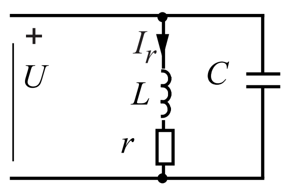
L7.12 Admittansen blir $Y = 1/R + \mathrm{j}\,(\omega C - 1/\omega L) = \dfrac{1}{R}\,[1 + \mathrm{j}\,Q\,(\omega/\omega_0 - \omega_0/\omega)]\,,$

där $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$ och $Q = \omega_0 CR$

$|\dfrac{Y(2f_0)}{Y(f_0)}| = 8$ ger $\sqrt{1 + Q^2 (2 - 1/2)^2} = 8$ varur $Q = 2\sqrt{7} = 5,3$

$\dfrac{\Delta f}{f_0} = \dfrac{1}{Q}$ ger $\Delta f = (100/5,3)\,\mathrm{kHz}\ = 18,9\,\mathrm{kHz}$ **=Svar**

L7.13 Förlusteffekten är $P = r|I_r|^2$



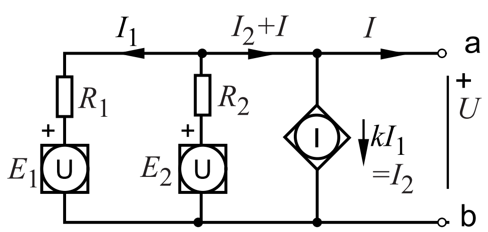
$$= r\,|\frac{U}{r + \mathrm{j}\,\omega L}|^2 = \frac{r|U|^2}{r^2 + \omega^2 L^2}$$

Vid resonans är $\omega_0^2 LC = 1$ och $Q = \omega_0 L/r$

Detta ger

$$P = \frac{r|U|^2}{r^2 + (rQ)^2} = \frac{|U|^2}{r(1+Q^2)} \approx \frac{|U|^2}{rQ^2}$$ **=Svar**

L7.15 Kirchhoffs spänningslag ger



$$\begin{cases} E_2 - E_1 &= R_1 I_1 + R_2 (I_1 + I + I_2) \\ U &= E_1 + R_1 I_1 \end{cases}$$

Enligt texten är $I_2 = kI_1$.

Eliminera I_1 och I_2

Ur första ekvationen får vi $I_1 = \dfrac{E_2 - E_1 - R_2 I}{R_1 + R_2(1+k)}$

Sätter man in detta i andra ekvationen får man

$U = E_1 + R_1 I_1 = \dfrac{R_2(1+k)E_1 + R_1 E_2}{R_1 + R_2(1+k)} - \dfrac{R_1 R_2}{R_1 + R_2(1+k)}\, I = U_0 - R_0 I$

Identifiering ger

$$U_0 = \frac{R_2(1+k)E_1 + R_1 E_2}{R_1 + R_2(1+k)}\,; \qquad R_0 = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2(1+k)} \qquad \textbf{=Svar}$$

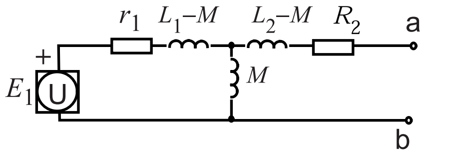
– –

L7.16 Impedansen: $Z = r + \mathrm{j}\,\omega L = (10 + \mathrm{j}\,24)\,\Omega \qquad |Z| = 26\,\Omega$

$$P = \mathrm{Re}\{\frac{UU^*}{Z^*}\} = \frac{|U|^2}{|Z|^2} R = \frac{130^2}{2\cdot 26^2}\cdot 10\,\mathrm{W} = 125\,\mathrm{W} \quad \textbf{=Svar}$$

– –

L7.17 Rita det ekvivalenta schemat!



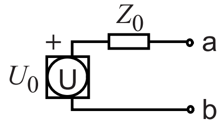
I tomgång (ab obelastad):

$$U_{\mathrm{ab}} = \frac{\mathrm{j}\,\omega M\ E_1}{r_1 + \mathrm{j}\,\omega(L_1 - M) + \mathrm{j}\,\omega M} = \frac{\mathrm{j}\,\omega M}{r_1 + \mathrm{j}\,\omega L_1} E_1 \quad \textbf{=Svar}$$

$$Z_{\mathrm{ab}} = [r_2 + \mathrm{j}\,\omega(L_2 - M)] + \frac{\mathrm{j}\,\omega M\,[r_1 + \mathrm{j}\,\omega(L_1 - M)]}{r_1 + \mathrm{j}\,\omega L_1}$$

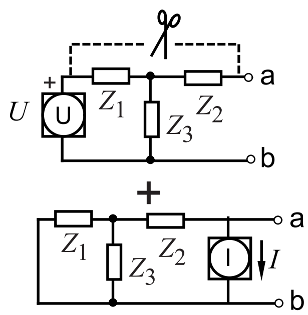
$$= r_2 + \mathrm{j}\,\omega L_2 + \frac{\mathrm{j}\,\omega M(-\mathrm{j}\,\omega M)}{r_1 + \mathrm{j}\,\omega L_1}$$

$$= r_2 + \frac{\omega^2 M^2 r_1}{r_1^2 + (\omega L_1)^2} + \mathrm{j}\,\omega\left(L_2 - \frac{\omega^2 M^2 L_1}{r_1^2 + (\omega L_1)^2}\right) \quad \textbf{=Svar}$$



– –

L7.18 Inre impedansen, sedd från ab är



$$Z_0 = Z_2 + \frac{Z_1 Z_3}{Z_1 + Z_3} = (2 + \mathrm{j}\,)\,\mathrm{k}\Omega$$

Tomgångsspänningen bestäms via superposition:

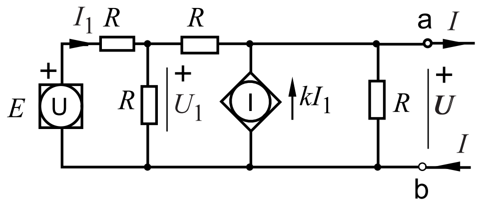
$$U_{\mathrm{ab}} = \frac{Z_3}{Z_1 + Z_3} U - Z_0\, I = [(9+\mathrm{j}\,3) - (7-\mathrm{j}\,4)]\,\mathrm{V} = (2+\mathrm{j}\,7)\,\mathrm{V}$$

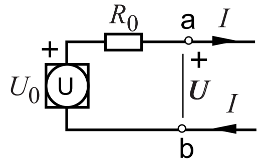
Max effekt vid anpassning ger

$$P_{\max} = \frac{|U_{\mathrm{ab}}|^2}{4R_0} = \frac{53\,\mathrm{V}^2}{8\,\mathrm{k}\Omega} = 6,6\,\mathrm{mW} \quad \textbf{= Svar}$$

L7.20 Kirchhoffs strömlag ger

$$\begin{cases} (U_1 - E)\,\dfrac{1}{R} + \dfrac{U_1}{R} + (U_1 - U)\,\dfrac{1}{R} = 0 \\[2ex] (U - U_1)\,\dfrac{1}{R} + \dfrac{U}{R} + I = k \cdot \dfrac{E - U_1}{R} \end{cases}$$





Elimineras U_1 får man ett samband mellan U , I och kända storheter.
Efter förenklingar får man
$U = E\,\dfrac{2k+1}{k+5} - \dfrac{3R}{k+5} \cdot I$
För ekvivalenta kretsen får man

$$U = U_0 - R_0 \cdot I$$

Identifiera koefficienterna! Detta ger

$$U_0 = E\,\frac{2k+1}{k+5} \qquad R_0 = \frac{3R}{k+5} \quad = \textbf{Svar}$$

L7.22 Tvåpolekvivalent med avseende på polparet ab ger

$$|U_0| = |\omega M I_0| \qquad Z_0 = R_2 + \mathrm{j}\,\omega L_2$$

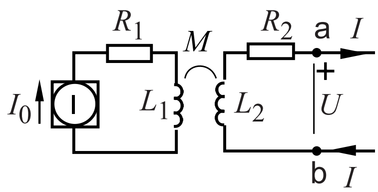
Max effekt får man vid anpassning, som ger

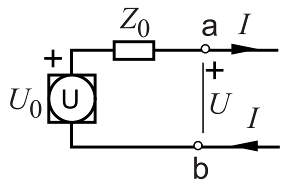
$$Z_{\text{bel}} = 1/Y_{\text{bel}} = Z_0^* = R_2 - \mathrm{j}\,\omega L_2$$

$Z_0^* Y_{\text{bel}} = 1$ ger

$$(R_2 - \mathrm{j}\,\omega L_2)\,(G + \mathrm{j}\,\omega C) = 1$$

$$\begin{cases} G R_2 + \omega^2 L_2 C = 1 \\[2ex] G L_2 = C R_2 \end{cases}$$





Härur erhålles $R = \dfrac{1}{G} = \dfrac{R_2^2 + \omega^2 L_2^2}{R_2}$ och $C = \dfrac{L_2}{R_2^2 + \omega^2 L_2^2}$

Max effekt: $P_{\max} = \dfrac{|U_0|^2}{4R_2} = \dfrac{\omega^2 M^2}{4R_2}\,|I_0|^2 \quad = \textbf{Svar}$

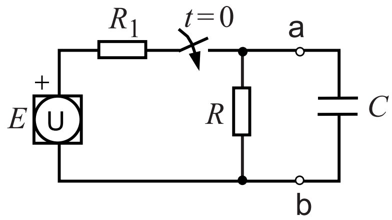
L7.23 Låt oss denna gång använda de givna siffervärdena direkt. Impedansen hos kondensatorn blir
$1/\mathrm{j}\,\omega C = -\mathrm{j}\ 1000\,\Omega = -\mathrm{j}\ \mathrm{k}\Omega$.
Vi finner då att kretsen består av två impedanser $R + 1/\mathrm{j}\,\omega C = (1 - \mathrm{j}\,)\,\mathrm{k}\Omega$ samt en kondensator med impedansen $1/\mathrm{j}\,\omega C = -\mathrm{j}\ \mathrm{k}\Omega$
Totala impedansen sett från generatorn blir

$$Z_{\text{tot}} = [1 - \mathrm{j} + \frac{(-\mathrm{j}\,)\,(1-\mathrm{j}\,)}{1-\mathrm{j}\,2}\,]\,\mathrm{k}\Omega \;=\; \frac{-2-\mathrm{j}\,4}{1-\mathrm{j}\,2}\,\mathrm{k}\Omega \;=(1,2-\mathrm{j}\,1,6)\,\mathrm{k}\Omega$$

Totala aktiva effekten, som förbrukas i nätet, är lika med den aktiva effekt, som generatorn levererar, dvs

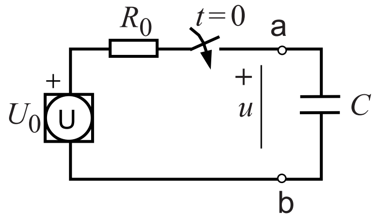
$$P = \mathrm{Re}\{EI^*\} = \mathrm{Re}\{\frac{|E|^2}{Z^*}\} = \frac{|E|^2\,\mathrm{Re}\{Z\}}{|Z|^2} = \frac{200^2 \cdot 1,2}{2^2}\,\mathrm{mW} = 12\,\mathrm{W} = \textbf{Svar}$$

L7.24 Gör om nätet till en tvåpol enligt nedre figuren!



$$\begin{cases} U_0 &= \dfrac{R}{R+R_1}\,E = 10\,\mathrm{V} \\[2ex] R_0 &= \dfrac{RR_1}{R+R_1} = \dfrac{1}{6}\,\mathrm{M}\Omega \end{cases}$$

För $t > 0$ gäller



$$C\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = i = \frac{U_0 - u}{R_0}$$

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{CR_0}\,u = \frac{U_0}{CR_0} \quad \text{har lösningen}$$

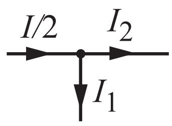
$$u = U_0 + k\,\mathrm{e}^{-(1/R_0C)t}$$

För $t = 0$ skall $u = 0$, eftersom $u = 0$ för $t < 0$. En kondensators spänning kan ju inte ändras plötsligt.

$$u(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad k = -U_0 \quad \text{som ger svaret}$$

$$u(t) = U_0\,(1 - \mathrm{e}^{-(1/R_0C)t}) = 10\,(1 - \mathrm{e}^{-60t/[\mathrm{s}]})\,\mathrm{V} \quad = \textbf{Svar}$$

L7.25 Strömgrening ger



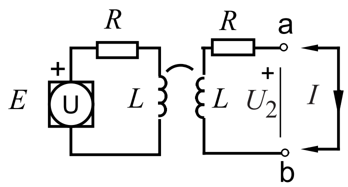
$$I_1 = \frac{1}{2}\,I - I_2 = \frac{1}{2}\,I - \frac{7R}{7R + 1/\mathrm{j}\,\omega C}\,I$$

$$= I\,\frac{1 - \mathrm{j}\,7\omega CR}{2\,(1 + \mathrm{j}\,7\omega CR)} = \frac{1}{2}\cdot \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\,2\arctan(7\omega CR)}\,I$$

Härav följer att

$$|I_1| = \tfrac{1}{2}\,|I| \quad , \quad \arg\{I_1\} = -2\arctan(14\pi fCR) \quad = \textbf{Svar}$$

L7.28 I tomgång är $I_2 = 0$!



$$\left.\begin{aligned} E &= (R + \mathrm{j}\,\omega L)\,I_{10} \\ U_2 &= \mathrm{j}\,\omega M I_{10} \end{aligned}\right\} \quad U_2 = \frac{\mathrm{j}\,\omega M}{R + \mathrm{j}\,\omega L}\,E$$

Vid kortslutning gäller (med ”nya” I_1 och I_2)

$$\left.\begin{array}{ll} E & = (R+\mathrm{j}\,\omega L)\,I_{11} + \mathrm{j}\,\omega M I_2 \\ 0 & = \mathrm{j}\,\omega M I_{11} + (R+\mathrm{j}\,\omega L)\,I_2 \end{array}\right\} \quad I_2 = \frac{E(-\mathrm{j}\,\omega M)}{(R+\mathrm{j}\,\omega L)^2+\omega^2 M^2}\,E$$

Att $k = |M|/L \ll 1$ innebär att $\omega^2 M^2 \ll \omega^2 L^2$ och kan försummas.
Eftersom $I = -I_2$ får vi

$$I = -I_2 = \frac{\mathrm{j}\,\omega M}{(R+\mathrm{j}\,\omega L)^2}\,E = \frac{U_2}{R+\mathrm{j}\,\omega L}$$

Härur erhålls

$$R+\mathrm{j}\,\omega L = \frac{U_2}{I} = \frac{0,45}{20\cdot 10^{-3}}\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\,(0,46+0,65)}\,\Omega = (10+\mathrm{j}\,20,15)\,\Omega$$

Härur erhålls R och ωL. Man kan få ωM ur sambandet

$$\left|\frac{\omega M}{R+\mathrm{j}\,\omega L}\right| = \left|\frac{U_2}{E}\right| \qquad \Rightarrow \qquad |\omega M| = 0,70\,\Omega$$

Med $k = |M|/L$ erhålls $k = 0,035$

Svar $R = 10\,\Omega$, $L = 0,64\,\mathrm{mH}$, $k = 0,035$

– –

L7.31 Strömmarna i de båda spolarna är lika och hälften av generatorströmmen!

Fall 1: $E = (R+\mathrm{j}\,\omega L)\,\dfrac{I^{(1)}}{2} + \mathrm{j}\,\omega M\,\dfrac{I^{(1)}}{2}$ varur

$$I^{(1)} = \frac{2E}{R+\mathrm{j}\,\omega(L+M)} = \frac{2E}{R+\mathrm{j}\,\omega L(1+k)}$$

Byter man strömriktning i ena spolen, byter M tecken. Detta ger

Fall 2: $E = (R+\mathrm{j}\,\omega L)\,\dfrac{I^{(2)}}{2} - \mathrm{j}\,\omega M\,\dfrac{I^{(2)}}{2}$ varur

$$I^{(2)} = \frac{2E}{R+\mathrm{j}\,\omega(L-M)} = \frac{2E}{R+\mathrm{j}\,\omega L(1-k)}$$

$\left|\dfrac{I^{(2)}}{I^{(1)}}\right| = \sqrt{2}$ ger

$$\frac{R^2+\omega^2 L^2(1+k)^2}{R^2+\omega^2 L^2(1-k)^2} = 2 \qquad R = 2\,\Omega \quad \text{och} \quad \omega L = 2\,\Omega \quad \text{ger}$$

$$1+(1+k)^2 = 2[1+(1-k)^2] \qquad \text{varur} \qquad k = 3\pm\sqrt{7} = 0,35 \quad (k\le 1)$$

Svar: Kopplingsfaktorn $k = 0,35$

– –

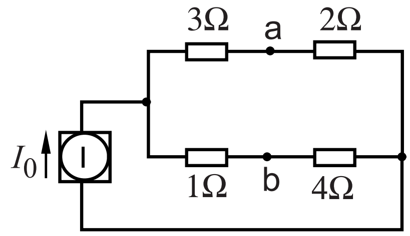
L7.33 Använd tvåpolekvivalent med avseende på 5-ohmsresistorns polklämmor. Detta ger

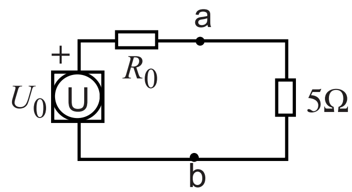
$$U_0 = \left[(\frac{2}{5}) - (\frac{4}{5})\right](\frac{5\Omega}{2})I_0 = -I_0 \cdot 1\,\Omega$$

$$R_0 = \frac{(3\Omega + 1\Omega)\,(2\Omega + 4\Omega)}{3\Omega + 1\Omega + 2\Omega + 4\Omega} = 2,4\Omega$$

Sökt ström blir nu $I = \dfrac{U_0}{R_0 + 5\Omega} = -0,135 I_0$

Svar: 13,5%

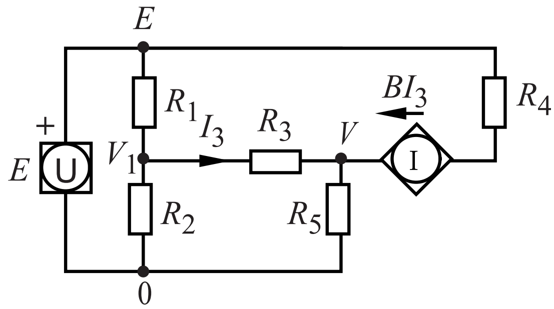




- -

L7.34 Använd nodanalys! Detta ger

$$\begin{cases} \dfrac{V_1 - E}{R_1} + \dfrac{V_1}{R_2} + \dfrac{V_1 - V}{R_3} = 0 \\ \dfrac{V - V_1}{R_3} + \dfrac{V}{R_5} - BI_3 = 0 \\ I_3 = \dfrac{V_1 - V}{R_3} \end{cases}$$



Förenkla! Man får

$$\begin{cases} V_1[\dfrac{1}{R_1} + \dfrac{1}{R_2} + \dfrac{1}{R_3}] - \dfrac{V}{R_3} = \dfrac{E}{R_1} \\ V[\dfrac{1+B}{R_3} + \dfrac{1}{R_5}] = \dfrac{(1+B)\,V_1}{R_3} \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} (\dfrac{7}{3})\,V_1 - V = \dfrac{12}{3}\,\mathrm{V} \\ [(\dfrac{25}{1}) + 10]\,V = (\dfrac{25}{1})\,V_1 \end{cases}$$

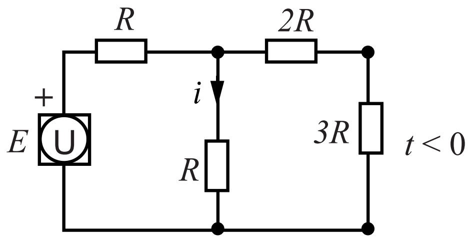
Härur erhålles $V = 1,8\,\mathrm{V}$ **= Svar**

- -

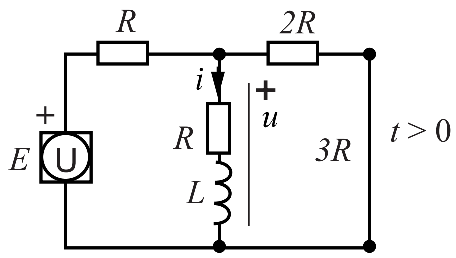
L7.35 För $t < 0$ blir strömmen genom spolen

$$i = (\frac{5R}{6R})\,[\frac{E}{R + (5/6)R}] = \frac{5E}{11R}$$

För $t \geq 0$ kan vi ställa upp följande ekvationer:



$$\begin{cases} \dfrac{u - E}{R} + i + \dfrac{u}{2R} = 0 \\ u = Ri + L\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} \end{cases}$$



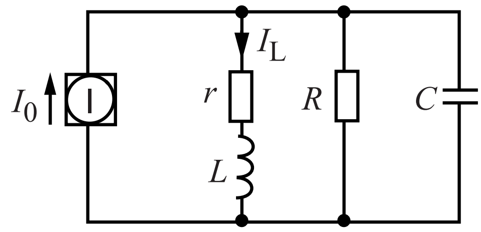
Detta ger ekvationen $\quad L\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + (\dfrac{5}{3})\,Ri = \dfrac{2E}{3} \quad$ varur $\quad i = A\,\mathrm{e}^{-\frac{5R}{3L}t} + \dfrac{2E}{5R}$

För $t = 0$ skall $i = \dfrac{5E}{11R}$ och detta ger $A = \dfrac{3E}{55R}$ och alltså

$i(t) = (\dfrac{3E}{55R})\,\mathrm{e}^{-\frac{5R}{3L}t} + \dfrac{2E}{5R} \quad$ för $t \geq 0 =$ **Svar**

– –

L7.36 Strömgrening ger



$I_L = \dfrac{Y_L}{G + \mathrm{j}\,\omega C + Y_L}\,I_0 \quad$ där $Y_L = \dfrac{1}{r + \mathrm{j}\,\omega L}$

och $G = \dfrac{1}{R}$

Efter förenkling erhålls

$$I_L = \frac{I_0}{1 + rG - \omega^2 LC + \mathrm{j}\,\omega(Cr + LG)}$$

$|I_L|$ har maximum, när |Nämnaren| har minimum.

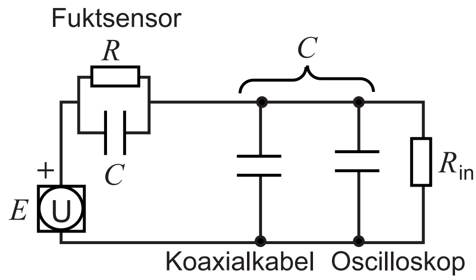
$|\text{Nämnaren}|^2 = [1 + rG - \omega^2 LC]^2 + [\omega(Cr + LG)]^2$

Derivering med avseende på ω ger

$\omega^2 LC = 1 + rG - \dfrac{(Cr + LG)^2}{2LC} \quad$ varur

$\omega = \sqrt{\dfrac{1}{LC} - \dfrac{1}{2}(\dfrac{r}{L})^2 - \dfrac{1}{2}(\dfrac{1}{RC})^2} =$ **Svar**

L7.27 Vi betraktar sensorn och oscilloskopet.
Vi buntar ihop oscilloskopets ingångskapacitans med kabelns kapacitans och upptäcker att den är lika med C. Dessutom är $R_{\mathrm{in}} = R$. Impedansen Z för RC-nätet (parallellkoppling) är



$$Z = \frac{R/\mathrm{j}\omega C}{R + (1/\mathrm{j}\omega C)} = \frac{R}{1 + \mathrm{j}\omega CR}$$

Spänningen U över oscilloskopets ingång är då $U = E\,\dfrac{Z}{Z + Z} = \dfrac{E}{2}$

Det är denna spänning Osqulda ser på oscilloskopet. Hon avläser topp-till-topp värdet som är $U_{\text{t-t}} = 4,0\,\mathrm{V}$ och periodtiden som är $1,0\,\mu\mathrm{s}$. Detta motsvarar frekvensen $f = 1\,\mathrm{MHz}$. Tvåpolen (källan + sensorn) är nu fullständigt karakteriserad. Osqulda ansluter nu digitalvoltmetern. Eftersom den har samma ingångsdata som oscilloskopet och ansluts via en likadan kabel belastas tvåpolen med en impedans Z_2 bestående av en dubbelt så stor kapacitans och hälften så stor resistans (parallellkoppling)

$Z_2 = \dfrac{(R/2)\cdot(1/2\mathrm{j}\omega C)}{(R/2) + (1/2\mathrm{j}\omega C)} = \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{R}{1 + \mathrm{j}\omega CR} = \dfrac{Z}{2}$

Spänningen på ingångarna till Osquldas instrument är nu

$U_2 = E\dfrac{Z_2}{Z+Z_2} = E\dfrac{(Z/2)}{Z+(Z/2)} = \dfrac{E}{3}$, där $E = 2U$.
Enligt ledningen mäter digitalvoltmetern sant RMS-värde. Det betyder att topp-till-topp värde måste divideras med faktorn $\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{2}}$. Detta ger
$U_2 = \dfrac{2U}{3} = \dfrac{U_{\text{t-t}}}{3\sqrt{2}} = 0,942809\,\text{V}$.
Kanske visar digitalvoltmetern just detta värde men inte säkert. Osqulda läste av ett värde från oscilloskopskärmen med två signifikanta siffror. Detta ligger till grund för våra beräkningar. Vi kan inte garantera att fler siffror är korrekta, varför ett mer realistiskt svar är 0,94 V.

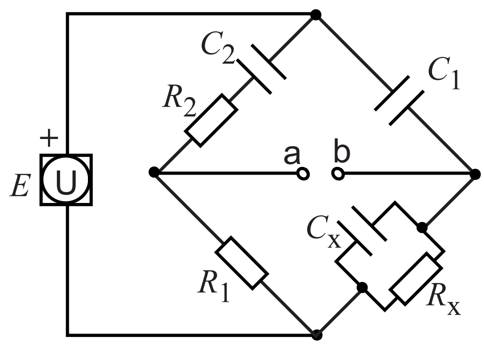
– –

L7.42 Sladden består av två ledare med den sammanlagda längden 100 m. I själva verket består sladden av tre ledare. Dock är den tredje (jordledningen) normalt strömlös. Den totala resistansen i sladden är då $R = 2,4\Omega$.
$\cos\varphi = 0,9$ ger $\sin\varphi = 0,436$. Eftersom motorns impedans är induktiv, blir $\sin\varphi$ positiv.

$P = |U|\cdot|I|\cdot\cos\varphi$ ger $|I| = \dfrac{P}{|U|\cdot\cos\varphi}$
Motorns impedans är
$Z = |Z|(\cos\varphi + \mathrm{j}\sin\varphi) = \dfrac{|U|^2\,\cos\varphi}{P}(\cos\varphi + \mathrm{j}\sin\varphi) = (28,6 + \mathrm{j}\,13,8)\,\Omega$
Nu kopplar vi sladdens resistans i serie med motorn och beräknar den nya strömmen I' .
$|I'| = \dfrac{|U|}{|Z+R|}$. Detta ger effektutvecklingen i kabeln:
$P_{\text{kabel}} = R\,|I'|^2 = 2,4\cdot\dfrac{230^2}{(28,6+2,4)^2 + (13,8)^2}\,\text{W} = 110\,\text{W}$. Ganska mycket!!

– –

L7.43 Spänningsfallet över resistansen R_1 är $U_1 = E\,\dfrac{R_1}{R_1 + R_2 + (1/\mathrm{j}\omega C_2)} = E\,\dfrac{\mathrm{j}\omega R_1 C_2}{1 + \mathrm{j}\omega(R_1+R_2)C_2}$
Den okända kapacitansen är
$Z_x = \dfrac{R_x\cdot(1/\mathrm{j}\omega C_x)}{R_x + (1/\mathrm{j}\omega C_x)} = \dfrac{R_x}{1 + \mathrm{j}\omega C_x R_x}$
Detta ger spänningen över den okända impedansen
$U_x = E\cdot\dfrac{Z_x}{Z_x + (1/\mathrm{j}\omega C_1)} = E\cdot\dfrac{\mathrm{j}\omega C_1 R_x}{1 + \mathrm{j}\omega R_x(C_1 + C_x)}$



Bryggan är i balans, dvs spänningen mellan a och b är noll, erhålls för $U_{\text{ab}} = 0$ ger $U_1 = U_2$ som ger
$\dfrac{\mathrm{j}\omega R_1 C_2}{1 + \mathrm{j}\omega C_2(R_1+R_2)} = \dfrac{\mathrm{j}\omega C_1 R_x}{1 + \mathrm{j}\omega R_x(C_1+C_x)}$, som kan förenklas till sambandet

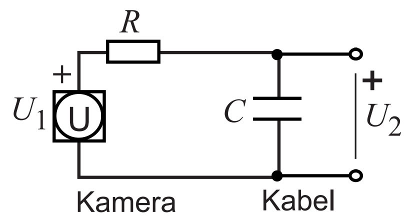
$j\omega R_1 C_2 - \omega^2 R_1 C_2 R_x (C_x + C_1) = j\omega R_x C_1 - \omega^2 C_1 C_2 R_x (R_1 + R_2)$

Imaginärdelarna lika ger $R_x C_1 = R_1 C_2$, varur $R_x = R_1 \frac{C_2}{C_1}$

Realdelarna lika ger $C_x R_1 = R_2 C_1$, varur $C_x = C_1 \frac{R_2}{R_1}$

– –

L7.44 Kamerans utresistans tillsammans med kabelns kapacitans bildar ett RC-filter (lågpassfilter). Låga frekvenser (svart-vit information) dämpas obetydligt. Man beräknar dämpningen genom att betrakta nätet bestående av kamerans utresistans och kabelns kapacitans som en (frekvensberoende) spänningsdelare. P.g.a .den relativt höga ingångsimpedansen i videoingången kan spänningsdelaren anses obelastad.



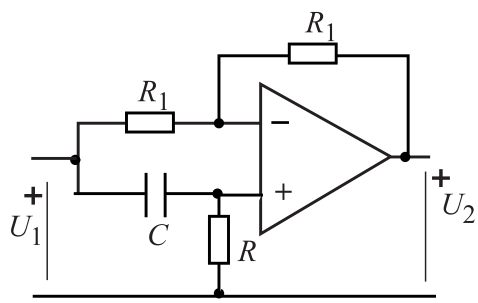
$|\frac{U_2}{U_1}| = |\frac{(1/j\omega C)}{R + (1/j\omega C)} = 0,1$, som efter förenklingar ger
$(\omega CR)^2 = 99$

Insättning av talvärden ger $C = 4,8\,\text{nF}$ och med kabelkapacitansen $167\,\text{pF/m}$ fås längden 28,5 m. För att färginformationen inte skall dämpas för mycket bör kabellängden inte överskrida detta värde.

Kan spänningsdelaren betraktas som obelastad? Vi betraktar den som en tvåpolekvivalent. Den inre impedansens belopp blir
$|Z| = |\frac{R}{1 + j\omega CR}| = |\frac{75}{1 + j10}\Omega| \approx 7,5\,\Omega \ll 10\text{k}\Omega$
Approximationen är i högsta grad tillåten!

– –

L7.45 Spänningsdelning ger $U^+ = U^- = \frac{R}{R + (1/j\omega C)} U_1 = \frac{j\omega CR}{1 + j\omega CR} U_1$
Kirchhoffs spänningslag ger
$U_2 = U_1 - 2R_1 I$, där $I = \frac{U_1 - U^+}{R_1}$



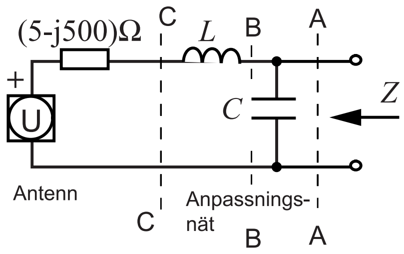
Insättning ger $I = \frac{U_1}{R_1}\left[1 - \frac{j\omega CR}{1 + j\omega CR}\right]$
och $U_2 = U^+ - R_1 I = U_1 \frac{j\omega CR}{1 + j\omega CR} - U_1 \frac{R_1}{R_1}\frac{1}{1 + j\omega CR} = \frac{j\omega CR - 1}{1 + j\omega CR}$

Förstärkningen $F = \dfrac{U_2}{U_1} = -\dfrac{1-\mathrm{j}\omega CR}{1+\mathrm{j}\omega CR} = -\dfrac{\sqrt{1+(\omega CR)^2}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\arctan(\omega CR)}}{\sqrt{1+(\omega CR)^2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\arctan(\omega CR)}}$

Härur följer att $|F| = 1$ och argumentet $\arg(F) = \pi - 2\arctan(\omega CR)$

– –

L7.46 Anpassning skall ske i snittet CC, mellan radions ingång och LC-nätet. Beräkningarna förenklas något om man flyttar snittet till BB. Detta är möjligt eftersom det mellan dessa båda snitt endast finns reaktiva element.



Impedansen till vänster om snittet BB är: $Z_{\text{vänster}} = \mathrm{j}\omega L + (5 - \mathrm{j}500)\Omega$
och till höger om snittet, med $R = 50\,\Omega$:

$$Z_{\text{höger}} = \frac{R\cdot(1/\mathrm{j}\omega C)}{R + (1/\mathrm{j}\omega C)} = \frac{R}{1+\mathrm{j}\omega CR} = \frac{R - \mathrm{j}\omega CR^2}{1+(\omega CR)^2}$$

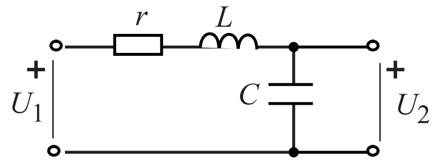
Anpassningvillkoret $Z_{\text{höger}} = Z^*_{\text{vänster}}$ ger för realdelarna

$5\Omega = \dfrac{R}{1+(\omega CR)^2}$, varur $\omega CR = 3$ och $C = 89\,\mathrm{pF}$

För imaginärdelarna får vi då $\omega L - 500\Omega = \dfrac{\omega CR^2}{1+(\omega CR)^2} = 15\,\Omega$ Härur erhålls
$\omega L = 515\,\Omega$ och $L = 765\,\mathrm{nH}$

– –

L7.47 $|\dfrac{U_2}{U_1}| = |\dfrac{(1/\mathrm{j}\omega C)}{(1/\mathrm{j}\omega C) + \mathrm{j}\omega L + r}| =$



$|\dfrac{1}{1-\omega^2 LC + \mathrm{j}\omega Cr}| = \dfrac{1}{\sqrt{(1-\omega^2 LC)^2 + (\omega Cr)^2}}$

Vid resonansfrekvensen $\omega = \omega_0 = \dfrac{1}{\sqrt{LC}}$ är

$|\dfrac{U_2}{U_1}| = \dfrac{1}{\omega_0 Cr}$

$Q_0 = \dfrac{\omega_0 L}{r}$. $\quad \omega_0 L = \dfrac{1}{\omega_0 C}$ ger $Q_0 = \dfrac{1}{\omega_0 Cr}$ varur $|\dfrac{U_2}{U_1}| = Q_0$

Vid frekvensen $\omega_1 \neq \omega_0$ är

$$|\frac{U_2}{U_1}| = \frac{1}{\sqrt{(1-\omega_1^2 LC)^2 + (\omega_1 Cr)^2}} = \frac{1}{\sqrt{(1-(\omega_1/\omega_0)^2)^2 + (\omega_1/\omega_0 Q_0)^2}}$$

Denna kvot skall vara 10 ggr så liten som kvoten vid resonans.

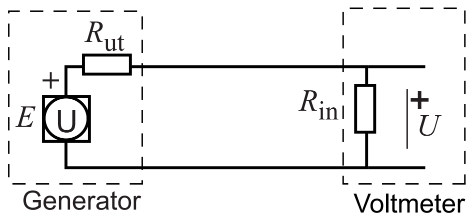
$$\frac{1}{\sqrt{(1-(\omega_1/\omega_0)^2)^2 + (\omega_1/\omega_0 Q_0)^2}} = \frac{Q_0}{10}$$

eller

$$Q_0^2\left[(1-(\omega_1/\omega_0)^2)^2+(\omega_1/\omega_0 Q_0)^2\right]=100$$

Eftersom $Q_0 \gg 1$ kan man skriva $Q_0^2\left[1-(\omega_1/\omega_0)^2)^2\right] \approx 100$.
Insättning av talvärden ger $Q_0^2\left[1-(198/202)^2)^2\right] \approx 100$ varur $Q_0 \approx 256$.
Detta är ett högt värde. Att konstruera en spole med så stort Q-värde är inte trivialt.

L7.48 Mätuppkopplingen utan kondensatorn ser ut så här:

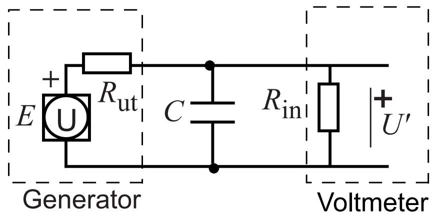


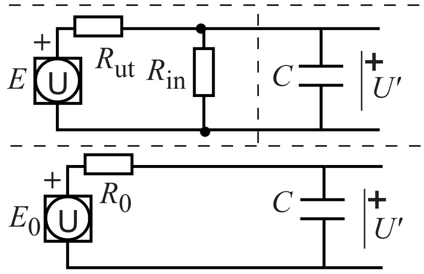
Spänningsdelning ger då direkt

$$U_1=\frac{R_{in}}{R_{in}+R_{ut}}E\,,\text{ som med } R_{in}=R_{ut} \text{ ger}$$

$U=E/2=0,7\,\mathrm{V}$
Detta ger $E=1,4\,\mathrm{V}$

Med kondensatorn inkopplad får vi detta nät. Eftersom kondensatorn C och R_{in} är parallellkopplade, kan man byta plats på dem och då få den mellersta figuren. Och allt som är till vänster om kondensatorn kan nu ersättas med en tvåpolekvivalent med emken
$E_1=(1/2)E=0,7\,\mathrm{V}$ och en inre resistans
$R_0=(1/2)R_{in}=25\,\Omega$



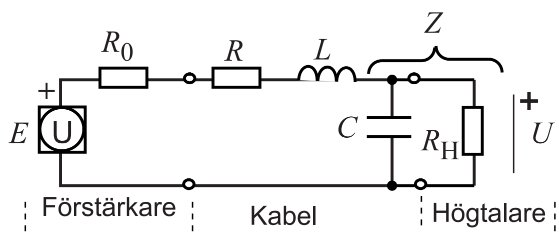


Den nedersta figuren ger nu

$$U_C=\frac{(1/\mathrm{j}\omega C)}{R_0+(1/\mathrm{j}\omega C)}E_1=\frac{1}{1+\mathrm{j}\omega C R_0}E_1$$

Insatta värden ger $C=6,2\,\mathrm{pF}$

L7.49 Ekvivalenta schemat för systemet visas i figuren. Spänningskällans inre resistans R_0 är försumbar.
Vi betecknar impedansen för parallellkopplingen av C och R_H med Z.
Vi får



$$Z=\frac{R_H\cdot(1/\mathrm{j}\omega C)}{R_H+(1/\mathrm{j}\omega C)}=\frac{R_H}{1+\mathrm{j}\omega C R_H}$$

a) Spänningsdelning ger $\dfrac{U}{E}=\dfrac{Z}{R+\mathrm{j}\omega L+Z}=\dfrac{R_H}{(1+\mathrm{j}\omega C R_H)\cdot(R+\mathrm{j}\omega L)+R_H}=$

$$\frac{R_H}{R_H+R-\omega^2 R_H L C+\mathrm{j}\omega(L+R R_H C)}$$

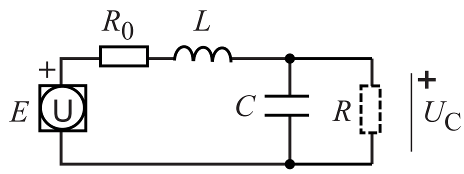
b) Vid $\omega = 0$ är $\dfrac{U}{E} = \dfrac{R_H}{R_H + R}$.

Vid gränsfrekvensen är $\dfrac{U}{E} = \dfrac{R_H}{R_H + R - \omega^2 R_H LC + \mathrm{j}\omega(L + RR_H C)} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\dfrac{R_H}{R_H + R}$

Sambandet blir $(R_H + R - \omega^2 R_H LC)^2 + [\omega(L + RR_H C)]^2 = 2(R_H + R)^2$

Anm. Kabeln fungerar som en resonanskrets. Resonansfrekvensen ligger normallt högt ovanför det hörbara området och påverkar inte ljudkvaliteten. Även gränsfrekvensen ligger betryggande högt jämfört med CD-spelarens gränsfrekvens (20 kHz) eller FM-radions (15 kHz).

L7.50 Spänningen som visas på oscilloskopets skärm är U_C . Eftersom R är mycket stor, kan dess inverkan på mätningarna försummas.



$|\dfrac{U_C}{E}| = |\dfrac{(1/\mathrm{j}\omega C)}{(1/\mathrm{j}\omega C) + \mathrm{j}\omega L + R_0}| =$

$|\dfrac{1}{1 - \omega^2 LC + +j\omega C R_0}|$

har sitt största värde när nämnaren har ett minimum. Vi får extremvärdet genom att sätta

$\dfrac{\partial}{\partial\omega}\{1 + \omega^4 L^2 C^2 - 2\omega^2 LC + \omega^2 C^2 R_0^2\} = 0$

Härur erhålls $L^2(2\omega^2 C) - 2L + R_0^2 C = 0$, varur $L = \dfrac{1 \pm \sqrt{1 - 2\omega^2 R R_0^2 C^2}}{2\omega^2 C}$

Med de angivna värdena blir $2\omega^2 R R_0^2 C^2 \ll 1$, och det sökta min-värdet erhålls för $L \approx \dfrac{1}{\omega^2 C} \approx 50\,\mathrm{mH}$